T A M P E R E E N   Y L I O P I S T O

RATIONAALILUVUN JA SEN ERI MERKITYSTEN HALLINTA YLÄKOULUSSA

Luonnontieteiden tiedekunta

Pro gradu -tutkielma

SAMI VIHERVAARA

Syyskuu 2018

TAMPEREEN YLIOPISTO, Luonnontieteiden tiedekunta
VIHERVAARA, SAMI: Rationaaliluvun ja sen eri merkitysten hallinta yläkoulussa
Pro gradu -tutkielma, 61 sivua., 4 liitesivua
Syyskuu 2018

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkitaan yläkoulun oppilaiden rationaaliluvun eri representaatioiden eli esitysmuotojen tuntemista. Motivaationa tutkielmalle on selvittää yläkoulun oppilaiden rationaaliluvun ymmärrystä ja sen eri representaatioiden erottamista toisistaan. Erityisesti haluttiin selvittää, erottuuko suhde muista esitysmuodoista. Tutkielmassa selvitetään myös, onko matematiikassa menestymisellä yhteyttä monipuolisempaan rationaaliluvun representaatioiden hallitsemiseen. Rationaaliluvut ovat tärkeä osa arkea ja jatkokouluttautumista, jolloin niiden hallitseminen peruskoulussa on jopa edellytys jatkoa ajatellen.

Tutkielmaa varten kerättiin aineisto kahdesta yläkoulun 7. ja 8. luokista sekä heidän käyttämästään oppikirjallisuudesta. Oppilaiden rationaaliluvun eri representaatioiden tuntemusta mitattiin avoimilla kuvailutehtävillä, perinteisillä laskutehtävillä ja murtolukujen suuruusvertailutehtävällä. Tätä aineistoa analysoitiin yhdistellen kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia menetelmiä.

Johtopäätöksenä oli, että oppikirjallisuudessakin eniten painoarvoa saaneet representaatiot, erityisesti osa kokonaisuudesta ja osamäärä, olivat paremmin tunnetut kuin vähemmän painoarvoa saaneet representaatiot. Noin puolet oppilaista osasivat tehdä mehua mehutiivisteestä annetun suhteen avulla ja se esiintyi kaikista vähiten oppilaiden vastauksissa. Murtolukujen suuruuden vertailu oli oppilaille pääosin helppoa. Tehtävissä sekä matematiikassa menestymisellä oli havaittavissa pieni yhteys erilaisten rationaaliluvun representaatioiden hallitsemiseen.

Asiasanat: rationaaliluku, murtoluku, representaatio, oppiminen

Sisällysluettelo

1 JOHDANTO

Arjessa jokainen henkilö törmää lukuihin. Useasti pyritään pysymään kokonaisluvuissa, sillä ne ovat helppo hahmottaa ja usein riittävän tarkka yksikkö kuvaamaan haluttua asiaa. Esimerkiksi kalliimmat hyödykkeet, kuten ajoneuvot ja kodinkoneet, ovat hinnoiteltu kokonaislukujen avulla. Tästä esimerkkinä voisi olla moottoripyörä, jonka hinta on 8870 €. Kuitenkin kokonaisluvut jäävät usein riittämättömiksi, sillä kokonaislukujen tarkkuus ei riitä kaikkien asioiden ja ilmiöiden kuvaamiseen. Siksi tarvitaan käytettävien lukujen laajentamista rationaalilukuihin, mistä esimerkkinä on halvemmat hyödykkeet, kuten elintarvikkeet ja pienet kulutustavarat. Näiden tuotteiden hinnat ovat usein määritelty rationaaliluvun avulla. Esimerkiksi karkkipussi voi maksaa 1,60 €. Peruskoulussa laajennus kokonaisluvuista rationaalilukuihin tapahtuu kolmannella vuosiluokalla tutustuttaessa murto- ja desimaalilukuihin (OPS). Alakoulussa opittuja rationaalilukujen ymmärtämis- ja laskutaitoja tarvitaan myöhemmissä luonnontieteellisten aineiden opiskelussa yläkoulussa ja lukiossa (Stewart 2005, 4; Wood ym. 2013, 390). Rationaalilukuja tarvitaan koulun lisäksi myös arjessa, esimerkiksi edellä mainittujen tuotteiden hinnoissa sekä muissa erilaisia yksiköitä vaativissa mittaluvuissa (Tian & Siegler 2018, 352). Tian ja Sieglerin mukaan USA:ssa tehdyssä tutkimuksessa selvisi, että jopa 68 % työväenluokasta tarvitsevat työssään rationaalilukuja. Tämä luku on todellisuudessa hyvin lähellä 100 % modernissa yhteiskunnassa. On siis selvää, että rationaalilukuja tarvitaan myös peruskoulun jälkeen ja ne ovat läsnä monen aikuisen arjessa.

Keskeisestä roolistaan huolimatta murtolukujen on havaittu olevan hankalia sekä opettaa että oppia (Shahbari & Peled 2017, 373; Clarke & Roche 2009, 127). Ympäri maailman on tutkimuksissa käynyt ilmi, että murtolukujen hallinta ala- ja yläkoulutasolla on heikkoa (Stewart 2005, 1). Kuitenkin Etelä-Aasian maissa, kuten esimerkiksi Singaporessa, ollaan suhteessa taitavampia murtolukujen käytössä ja soveltamisessa kuin muualla maailmassa (Mullis ym. 2012; TIMSS 2011, 130, 132, 135). Vaikka Suomessa opetuksen laatu on korkea, eroavat tulokset silti suuresti kärkimaista. Opettajat tekevät omien kokemuksiensa lisäksi oletuksia oppilaiden osaamisesta heidän edeltävän opintopolun avulla (Olive & Vomvoridi 2006, 18). On siis aiheellista tutkia murtolukujen osaamista ja niihin johtaneiden opetustapojen toimivuutta yläkoulussa, joka on siltana alakoulusta jatko-opintoihin.

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkitaan yläkoulun 7.- ja 8. luokkalaisten rationaaliluvun eri esitysmuotojen tuntemista. Tutkielmassa pyritään myös löytämään yhteys matematiikassa menestymisen ja esitysmuotojen tuntemisen välille sekä selvittämään oppilaiden käyttämän matematiikan oppikirjallisuuden antama kuva rationaaliluvuista ja sen eri esitysmuotojen välisistä yhteyksistä. Aineisto kerättiin Kanta-Hämeessä yhden yläkoulun 7. ja 8. vuosiluokalla olevista oppilaista sekä heidän käyttämästään matematiikan oppikirjallisuudesta.

2 RATIONAALILUVUN MÄÄRITELMIÄ JA OMINAISUUKSIA

Tässä luvussa käsitellään tutkimuskysymyksiin liittyvä teoreettinen viitekehys. Pääpaino on rationaaliluvun ja sen erilaisten ominaisuuksien määrittelemisessä. Oppilaan muodostaessa rationaalilukujen eri esitysmuotojen välisiä yhteyksiä käsitellään oppilaan tapaa oppia uusia asioita ja yhdistää eri asioita toisiinsa.

2.1 Määritelmiä

Tässä kappaleessa noudatetaan Shaughnessyn (2009, 8–9) esitysjärjestystä soveltavin osin.

Rationaaliluku määritellään usein luvuksi $\frac{p}{q}$. Tässä *murtolukuesitykseksi* kutsutussa esitystavassa rationaaliluku ilmaistaan kahden kokonaisluvun p ja q avulla, missä $q \neq 0$. Luvut p ja q erotetaan toisistaan murtoviivalla ja tällä tavalla esitettynä murtoluku kirjoitetaan sanallisessa muodossa ”luku p jaettuna luvulla q” tai vaihtoehtoisesti ”p per q”. Tällöin rationaaliluku tulkitaan jakolaskun tulokseksi. Tulkinnat ”luvun p suhde lukuun q” ja ”luvun p verran osia luvusta q” ovat myös mahdollisia, mutta semanttisesti tarkoittavat eri asioita. Suhteen tapauksessa olisi kaksi erilaista mittaa, joiden välinen kokoero olisi rationaaliluku ja jälkimmäisessä olisi jotkin konkreettiset asiat, joista toisen osuutta toisesta selvitettäisiin ja kuvattaisiin rationaaliluvulla. Luku q ei voi olla nolla, sillä nollalla jakamista ei ole määritelty. Luvusta p voidaan käyttää termejä jaettava sekä osoittaja, ja q:stä termejä jakaja sekä nimittäjä. Jaettava ja jakaja liittyvät tilanteeseen, jossa murtolukumerkinnällä kuvataan jakolaskua. Osoittaja ja nimittäjä kuvaavat murtolukumerkinnässä murtolukua. (Shaughnessy 2009, 8–9)

Matemaattisesti rationaalilukujen joukko voidaan ilmaista murtolukumerkinnän avulla

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}. \text{(Fischer 2014, 4)}$$

Kaikki kokonaisluvut kuuluvat rationaalilukuihin, sillä jokainen kokonaisluku a voidaan esittää murtolukuna $\frac{a}{1}$. Näin ollen rationaalilukujen joukko on kokonaislukujen joukon laajennus.

Toinen rationaaliluvun esitystapa on *desimaaliluku*, missä lukujen p ja q välistä jakolaskun lopputulosta ilmaistaan kymmenjärjestelmään perustuvan menetelmän avulla. Desimaaliluku koostuu kahdesta osasta, jotka erotetaan desimaalipilkulla (,) toisistaan. Pilkun vasemmalla puolella olevat luvut kertovat, kuinka monta kertaa q sisältyy kokonaan p:en. Tätä osaa kutsutaan kokonaisosaksi. Pilkun jälkeen seuraava luku vasemmalla kertoo ykköset, seuraava kymmenet ja niin edelleen kymmenjärjestelmän mukaisesti. Pilkun oikealla puolella olevat luvut kertovat, mitä on laskun p jaettuna q:lla jakojäännös. Tätä jälkimmäistä osaa kutsutaan desimaaliosaksi. Pilkun jälkeen ensimmäinen luku oikealla kertoo montako kymmenesosaa jää yli, toinen sadasosien määrän ja niin edelleen. Useimmiten desimaaliluku on päättyvä, mutta se voi olla myös päättymätön jaksollinen luku, jolloin desimaalikehitelmä usein pyöristetään muutaman desimaalin tarkkuuteen jaksollisuuden alkamisen jälkeen. Esimerkiksi luku $\frac{2}{3}$, joka on desimaalilukumuodossa 0,666…, ilmaistaan usein desimaalilukuna 0,67. (Shaughnessy 2009, 8–9)

Tässä tutkimuksessa selvitetään myös oppilaiden kykyä erottaa *suhde* murtoluvusta. Tutkimuksessa selvitetään pystyvätkö oppilaat tunnistamaan murtoluvun käsitteen erilaisista kuvista ja onnistuuko suhteen avulla laskeminen. Suhteen käsitteellä matematiikassa tarkoitetaan kahden asian, joilla on jokin sama mitattava ominaisuus, välistä multiplikatiivista yhteyttä. Multiplikatiivisuus tarkoittaa sitä, että toisen asian kertominen jollain luvulla myös kertoo toisen asian tällä luvulla. Jos esimerkiksi maalattavan seinän pinta-ala kaksinkertaistetaan, kaksinkertaistuu myös tarvittavan maalin määrä. Ben-Chaim, Ilany & Keret (2012, 24) määrittelevät suhteen kahden luvun, suuruuden, määrän tai lausekkeen väliseksi osamääräksi tai osuudeksi, missä lukujen suhteellista kokoa toisiinsa nähden käytetään mittana. Esimerkiksi mehua valmistettaessa tarvittavan veden määrä on aina kolminkertainen tiivisteen määrään, kun niiden välinen suhde on 3:1. Matemaattisena merkintänä suhteelle käytetään yleisimmin kaksoispistettä (:) ja esimerkiksi lukujen a ja b suhde merkitään a:b ja se luetaan "a:n suhde b:hen". Tämän tutkimuksen osalta voidaan olettaa, että sekä a että b ovat nollasta eroavia positiivisia kokonaislukuja, vaikka ne voivat olla myös reaalilukuja. Murtolukumerkinnässä $\frac{a}{b}$ lukuja a ja b kutsutaan suhteen jäseniksi (Väisälä 1963, 18). Tämä määritelmä suhteelle käsittelee riittävän kattavasti tässä tutkimuksessa vaadittavat suhteen ominaisuudet. (Ben-Chaim, Ilany & Keret, 2012, 23–28.)

2.2 Kokonaisluvusta rationaalilukuun

Ympäri maailman peruskouluja murtoluvut ovat hyvin tärkeä osa matematiikan opetusta (Clarke & Roche 2009, 127). Van Hoof, Verschaffel ja Van Dooren (2017) mukaan oppilaan hyvä luonnollisten lukujen osaaminen antaa viitettä yleisesti hyvästä matematiikan osaamisesta. Tämä koskee myös rationaalilukujen osaamista. Toisaalta myös tutkimukset ovat osoittaneet, että hyvä matemaattinen osaaminen myöhemmissä opinnoissa on mahdollinen seuraus hyvälle rationaalilukujen osaamiselle alakoulussa (Tian & Siegler 2018, 352). Rationaaliluvut ja niiden ymmärtäminen ja käytön osaaminen voidaan nähdä olevan tärkeä osa monen oppilaan opinpolkua matematiikassa.

Eräässä National Assessment of Educational Progressin (NAEP) tutkimuksessa huomattiin, että neljännen luokan oppilailla oli vaikeuksia käyttää murtolukuja käytännön tilanteissa (Cramer, Post & del Mas 2002, 115). Tämä on myös ymmärrettävää, sillä rationaaliluvut ovat ominaisuuksiltaan erilaisia kuin luonnolliset luvut (Shaughnessy 2009; Merenluoto 2001, 46–47). Kaarina Merenluoto (2001, 46) ajattelee tämän johtuvan siitä, että oppilaat säilyttävät edelliseen lukualueeseen (kokonaisluvut) liittyvät ajattelutavat, vaikka rationaaliluvut eroavat monelta osin ominaisuuksiltaan kokonaisluvuista. Esimerkiksi murtolukujen kertolasku muistuttaa kokonaislukujen laskusäännöissä enemmän jako- kuin kertolaskua (Merenluoto 2001, 46). Moss'n ja Casen (1999) mukaan alakoulun opetuksessa keskitytään rationaalilukujen semantiikan sijaan enemmän rationaalilukujen syntaksin opetukseen eli siihen, kuinka rationaalilukuja käytetään laskuissa. Tällöin rationaalilukujen semantiikan eli niiden luonteen ymmärtäminen jätetään pienemmälle painoarvolle. Luonnollisesti on tärkeää, että oppilaat oppivat käyttämään uusia merkintöjä sekä laskemaan niillä, mutta ulkoa opettelun sijaan ymmärrykseen tulisi panostaa enemmän. Mikäli rationaaliluvun semantiikan ymmärtää, on sen käyttäminen ja sen avulla laskeminen helpompaa. Tehdessäni tätä pro gradu -tutkielmaa koin monia oivalluksen hetkiä ymmärtäessäni paremmin rationaaliluvun merkitystä.

2.3 Rationaaliluvun eri representaatiot

Rationaaliluvut ovat yhtä lailla matemaattisia abstrakteja olioita kuten luonnolliset luvut. Koska ne eivät ole mitään konkreettista, käsitellään niitä *representaatioiden* eli *esitysmuotojen* avulla (Merenluoto 2001, 24). Tällöin tietty olio voidaan abstrahoida tarkoittamaan montaa erilaista ilmiöön liittyvää abstraktiota. Merenluodon (2001, 25) havainnollistavaa esimerkkiä lainaten luku +2 voidaan käsittää operaationa, jossa siirrytään kaksi askelta oikealle lukusuorarepresentaatiossa tai lukua, joka on kahden yksikön päässä lukusuorarepresentaation nollakohdasta positiiviseen suuntaan. Nämä ovat vain kaksi esimerkkiä erilaisista tulkinnoista, joita on paljon enemmän. Kirjallisuudessa matemaattisille käsitteille onkin hyväksytty ajatus, että niillä on kaksijakoinen olemus (Merenluoto 2001, 25). Matemaattiset käsitteet voidaan käsittää prosesseina, joissa niitä käytetään jonkin objektin operointiin. Toisaalta matemaattiset käsitteet voivat olla objekteja, joita voidaan operoida. Tämä matemaattisen käsitteen kaksijakoinen olemus ja lukuisat eri representaatiot aiheuttavat sen, että matemaattisen käsitteen esiintymisympäristöllä on merkitystä sen oikeaoppisen tulkinnan kannalta.

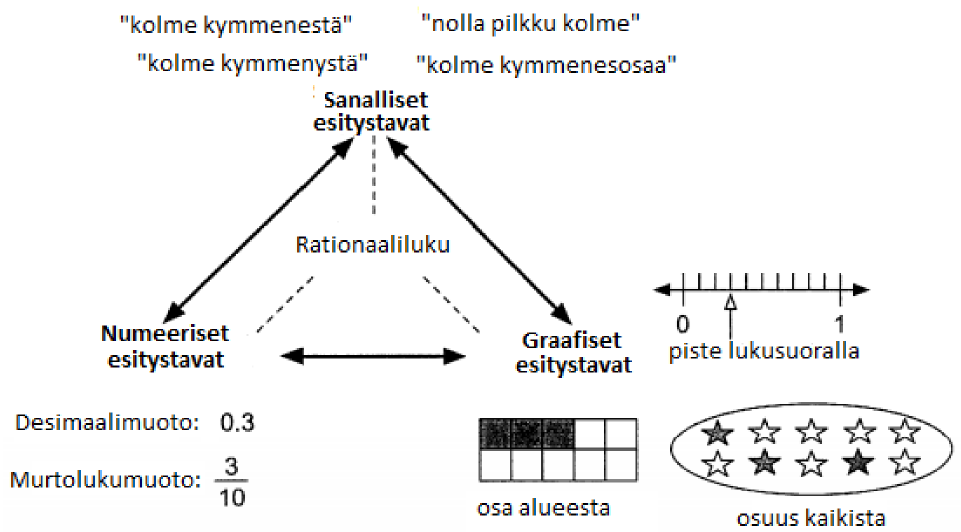
Oppilas tutustuu ja opetetaan käyttämään lukuisia eri rationaaliluvun esitysmuotoja. Tällaisia esitysmuotoja ovat esimerkiksi numerot, kuvat, sanat ja kuvaajat. Näitä eri esitysmuotoja voidaan käyttää kuvaamaan erilaisissa ilmiöissä esiintyviä rationaalilukuja, jolloin eri representaatioiden ymmärtäminen sekä muuntaminen toisikseen on tärkeä osa oppilaan oppipolkua (Shaughnessy 2009, 2). Ray, Aleven ja Rummel (2017, 332–334, 348–349) kutsuvat tätä kykyä käyttää eri rationaaliluvun esitysmuotoja ja vaihdella niitä toisikseen representionaaliseksi kompetenssiksi. Ray ja kumppanit jaottelevat representionaalisen kompetenssin representaatioiden välisten yhteyksien järjelliseen ja aistinvaraiseen havaitsemiseen. Järjellisessä havainnoinnissa oppilas pystyy ajattelun kautta löytämään eri representaatioiden väliset yhteydet, kun taas aistinvaraisessa havainnoinnissa oppilas nopeasti havaitsee tutun representaation ja pystyy yhdistämään sen toiseen representaatioon. Tutkimuksessa havaittiin näiden molempien havainnointitapojen olevan yhtä tärkeitä, mutta erityisesti järjellisen havainnoinnin johtavan hyvään aistilliseen havainnointiin (Ray ym. 2017, 332–334, 348–349). Molemmat havainnointitavat ovat tärkeitä, mutta erityisesti järjellinen havainnointi on tärkeässä roolissa, kun opinnot etenevät ja ilmiömaailma muuttuu yhä abstraktimmaksi. Silloin voi olla hyvin vaikea hahmottaa tilannetta intuitiivisesti ja olisi hyödyllistä osata hakea oikeat esitystavat ja niiden muunto toisikseen päättelyn avulla. Tässä pro gradu -tutkielmassa halutaan antaa oppilaille mahdollisuus järjelliseen havainnointiin antamalla vastausaikaa reilusti. Antamalla mahdollisuus järjelliseen havainnointiin voidaan selvittää oppilaan aito kyky tehtävien tekemiseen, kuitenkin pitäen testi pituudeltaan lyhyenä motivaation ylläpitämiseksi.

Shaughnessy (2009, 2–4) on tutkinut näitä erilaisia representaatioita ja on jakanut erilaiset representaatiotyypit kolmeen erilliseen ryhmään. Nämä representaatiotyypit on jaettu niiden merkitsemisen tyylin mukaan sanoilla, numeroilla ja kuvilla ilmaistaviin esitystapoihin.

Ensimmäinen ryhmä koostuu rationaaliluvun sanallisista kuvailuista. Tähän sisältyy esimerkiksi puhe ja sanalliset selitykset. Tyypillisiä esimerkkejä ovat ilmaisut “kaksi kolmesta”, “kaksi kolmasosaa” ja “(noin) nolla pilkku kuusi seitsemän”. Yhteistä näille kaikille on se, että luvun merkitys rakennetaan sanallisen selityksen avulla.

Toinen ryhmä sisältää ne merkinnät, joissa rationaalilukua käsitellään numeroiden avulla. Koulumaailmasta tutuimmat merkintätavat ovat desimaalimerkintä 0,5 ja murtolukumerkintä $\frac{1}{2}$. Tällaiset merkinnät ovat tyypillisimmät rationaaliluvun esitysmuodot koko peruskoulun ajan. (Laskutaito 1–8)

Kolmannessa ryhmässä on ne esitysmuodot, joissa rationaalilukua havainnollistetaan kuvan tai kuvaajan avulla. Näihin sisältyy muun muassa väritetyn pinta-alan, osan joukosta sekä lukusuoran avulla esitetyt rationaaliluvun esitykset. Kun rationaaliluvun numeroesitykset opetetaan, ovat ne uusia ja vaikeasti hahmotettavia (Shaughnessy 2009, 4). Tällöin niiden rinnalle on hyvä tuoda myös konkreettinen arkielämästä tuttu esitysmuoto, joka on helpompi hahmottaa. Ohessa on kuva Shaughnessyn (2009, 3) artikkelista, jossa näiden kolmen eri ryhmän välistä suhdetta kuvataan.



Kuva 1 Shaughnessyn esittämä jaottelu eri rationaaliluvun esitystapojen luokitteluun käännettynä suomeksi (Shaughnessy 2009, 3).

Shaughnessyn (2009, 2) mukaan rationaaliluvun esitystä voi vaihtaa toiseksi representaatioksi. Vaihdon voi suorittaa ryhmän sisällä tai ryhmästä toiseen. Tämä on hyödyllistä tilanteissa, joissa rationaaliluvun muuttaminen toiseen representaatioon auttaa hahmottamaan tilannetta. Esimerkiksi tehtävässä, jossa joku henkilö saa kaksi kolmasosaa yhdeksästä omenasta, voi olla oppilaalle helpompi hahmottaa tilanne piirtämällä omenat ja värittämällä henkilön saamat omenat. Tällöin on siirrytty sanallisen kuvailun ryhmästä kuvan avulla ilmaistavaan ryhmään. Tällainen kyky pystyä muuttamaan rationaaliluku eri representaatiokseen voidaan nähdä tärkeänä osana matemaattista osaamista (Shaughnessy 2009, 3). Mielestäni tällainen osaaminen on hyvin tärkeää myöhemmissä opinnoissa, sillä yhä enemmän opinnoissa painotetaan käytännönläheisyyttä, jolloin arkimaailman ongelmien muuttaminen matematiikan symboliikkaan tai toisin pain on tärkeä taito. Opetussuunnitelmassa mainitaan, että matematiikan opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja kehittää matematiikan käytön soveltamista monipuolisesti (OPS 2014, 128).

Nämä kolme eri ryhmää ovat hyvä jako, mutta sen ongelmana voidaan nähdä liian avoimet ryhmät ja tulkinnanvaraisuus. Tässä tutkielmassa haluan erotella esimerkiksi desimaali- ja murtoluvun toisistaan, mihin Shaughnessyn ryhmittely ei riitä. Lisäksi oppilaille annettu tehtävänanto kannustaa sanallisiin selityksiin, jolloin oppilaiden vastauksissa ei saada riittävästi tietoa kuvallisista tai numeroiden avulla esitetyistä rationaaliluvun taidoista ja tiedoista.

Murtolukujen eri esitysmuodot voidaan nähdä erilaisina perspektiiveinä samalle oliolle. Marshall (1993) on luokitellut nämä perspektiivit *osaksi kokonaisuudesta* (part-whole), *suhteeksi* tai *osuudeksi* (ratio), *osamääräksi* (quotient) tai *jakolaskuksi* (division), *operaattoriksi* (operator) ja *mitaksi* (measure). Vastaavasti Shahbari & Peled (2017, 373–374) on jaotellut murtoluvut vastaaviin osakonstruktioihin.

Osalla kokonaisuudesta tarkoitetaan sitä, että kokonaisuus jaetaan samankokoisiin osiin, ja osia valitaan tietty määrä (Shahbari & Peled 2017, 373). Tässä esitysmuodossa on erityisen tärkeää, että on olemassa jokin konkreettinen kokonaisuus, joka on mahdollista jakaa osiksi. Sanallisesti tällaista jakoa ja sen rationaalilukumuotoa voidaan esimerkiksi ilmaista “kolme omenaa neljästä”. Murtolukumerkinnällä voidaan vastaavasti merkitä $\frac{3}{4}$ neljästä omenasta.

Suhteella kuvataan ilmiötä, jossa kahden asian, joilla on yhteinen mitta, suuruudet ovat yhteydessä toisiinsa (Shahbari & Peled 2017, 373). Suhteelle on oleellista, että molemmilla suhteeseen kuuluvilla asioilla on jokin mitattava ominaisuus, esimerkiksi pituus, määrä tai hinta. Suhdetta voidaan kuvata sanallisesti “yhden suhde kolmeen” ja numeroiden avulla 1 : 3 tai $\frac{1}{3}$. Tällöin voidaan päätellä, että yhtä yksikköä ensimmäistä asiaa varten tarvitaan kolminkertainen määrä toista asiaa. Näiden kahden asian välinen suhteellinen suuruusero tulee selville suhteen avulla. Arkielämästä monelle tuttu esimerkki suhteen avulla laskettavista asioista on mehutiivisteen käyttö, jossa tiettyyn määrään mehutiivistettä tarvitaan tietty määrä vettä.

Shabbari & Peled (2017, 373) määrittelevät osamäärän tai toiselta nimeltään osuuden kuvaamaan sekä itse jakolaskua ja sen lopputulosta. Jakolaskua kuvataan pääosin kaksoispistemerkinnällä 1:3, mikä luetaan “yksi jaettuna kolmella”. Jos murtolukumerkinnällä kuvataan jakolaskua, voidaan murtolukumerkintä tulkita myös osamääränä (Shahbari & Peled 2017, 373). Murtolukulukumerkinnällä kuvatun laskun tulos on rationaaliluku, jota voidaan kuvata vastaavalla murtolukumerkinnällä. Yläkoulussa suhdetta käytetään paljon mittakaavan opetuksessa ja soveltamisessa (Laskutaito 7–8).

Operaattorilla tarkoitetaan nimensä mukaisesti operaattoria, jonka avulla jotain asiaa käsitellään (Shahbari & Peled 2017, 373). Kun murtolukua käytetään kuvaamaan operaattoria, kyse on jonkin asian kertomisesta tai jakamisesta. Murtoluvulla operoitaessa laskun lähtö- ja maalijoukot pysyvät reaalilukuina, jolloin terminologisesti oikeampi termi kyseiselle operaattorille olisi funktio (Wikipedia, Operaattori (matematiikka)). Tässä tutkimuksessa kuitenkin pitäydytään termissä operaattori. Merkintöinä operaattorina toimivilla rationaaliluvulle voidaan käyttää desimaali- tai murtolukuesitystä. Yleisimmät käyttökohteet koulumatematiikassa murtoluvulle operaattorina ovat laskut, joissa rationaaliluvulla kerrotaan tai jaetaan jokin luku tai kun jotain asiaa suurennetaan tai kutistetaan murtoluvun osoittaman suuruuden verran.

Viimeisenä esitysmuotona käsitellään mitta. Mitalle on ominaista, että luvulla kuvataan jotain mitattavaa asiaa (Shahbari & Peled 2017, 373). Esimerkiksi lukusuora, pituus tai paino voidaan käsittää mittana. Arjessa mitan käsitteenä toimiviin rationaalilukuihin törmää esimerkiksi lämpömittarin ja matkan yhteydessä.

Kaikkia näistä viidestä eri esitysmuodosta voidaan kuvata murtolukumerkinnän avulla. Olkoon esimerkiksi murtolukumerkintä $\frac{2}{5}$ ja selvitetään, mitä erilaisia esitysmuotoja se voi kuvata. Osassa kokonaisuutta tämä murtolukumerkintä kertoo, että on olemassa osoittajan verran asioita, jotka jaetaan nimittäjän osoittamalle määrälle asioita. Kuitenkaan kyse ei ole operaatiosta, vaan operaation lopputuloksesta – jokainen jakajan osa saa jakolaskun lopputuloksen verran jaettavan osia, tässä tapauksessa 0,4 verran. Osamäärässä oleellista on, että merkintä ilmaisee jakolaskuoperaation, jossa osoittaja jaetaan nimittäjällä. Murtolukumerkintä siis kuvaa tässä tapauksessa jakolaskua kaksi jaettuna viidellä tai lukua 0,4, joka on jakolaskun lopputulos. Mikäli tällä murtolukumerkinnällä tarkoitetaan suhdetta, suhteen ylempi jäsen on aina jonkin luvun verran moninkertainen alempaan jäseneen nähden. Esimerkiksi tässä tapauksessa ylempi jäsen on aina 0,4-kertainen alempaan jäseneen nähden. Oleellista ei ole tarkat määrät, vaan suhteen jäsenien moninkertaisuus toisiinsa nähden. Kyse ei ole operaatiosta, vaan jäsenien välisen jakolaskun tuloksesta. Jos murtolukumerkinnällä kuvataan operaattoria, on kyse operaatiosta, jossa jotain asiaa kerrotaan murtolukumerkinnän kertovalla luvulla. Esimerkiksi jotain asiaa voidaan kertoa murtoluvulla $\frac{2}{5}$. Kun murtolukumerkinnällä tarkoitetaan mittaa, kuvataan murtolukumerkinnän jakolaskun tuloksen etäisyyttä yleisesti ottaen lukusuoran tai koordinaatiston keskipisteestä.

Tällainen jaottelu on Shaughnessyn jaottelua tarkempi ja se rajaa rationaaliluvun eri esitysmuodot toisistaan selkeästi. Tässä jaottelussa heikkoutena on se, että monia näistä eri rationaaliluvun esitysmuodoista voidaan merkitä täsmälleen samoilla merkinnöillä. Esimerkiksi kaksoispistemerkinnällä on luonnollista esittää kahden asian välistä jakolaskua tai suhdetta. Merkinnän takana olevan esitysmuodon selvittämisen tueksi tarvitaan tietää konteksti, jossa merkintää käytetään. Tässä pro gradu -tutkielmassa tähän käytetään teoriaohjaavaa analyysiä tutkielman tekijän apuna.

2.4 Murtolukujen oppimisen ja opettamisen vaikeuden syitä

Rationaaliluvut ovat keskeisestä asemastaan huolimatta hyvin vaikea sekä oppia että opettaa (Shaughnessy 2009, 1). Juuri monet erilaiset murtoluvun representaatiot sekä tulkinnat voivat aiheuttaa murtolukujen oppimisen ja ymmärtämisen vaikeuden (Clarke & Roche 2009, 127). Samalla merkinnällä voidaan tarkoittaa aivan erilaista ilmiötä, jolloin ei riitä opetella tiettyjen merkintöjen tarkoittavan tiettyjä esitysmuotoja, vaan tulee ymmärtää tapauskohtaisesti, mitä merkinnällä tarkoitetaan. Tällaisen representionaalisen kompetenssin (Ray ym. 2017, 332–334, 348–349) puuttuminen tai heikkous voi aiheuttaa ongelmia rationaalilukuja vaativissa laskuissa.

Aiemmassa kirjallisuudessa rationaalilukujen vaikeudesta syytetään ”luonnollisen luvun vääristymää” (natural number bias) (Vamvakoussi & kumpp. 2012). Tällä tarkoitetaan sitä, että rationaalilukujen laskutoimituksessa käytetään luonnollisten lukujen laskutoimitussääntöjä yleistäen ne aiemmista opinnoista (Clarke & Roche 2009, 128; Merenluoto 2001, 46). Asiaa on tutkittu paljon ja on havaittu, että oppilaat tekevät systemaattisesti virheitä erityisesti niissä laskutoimituksissa, joissa luonnollisten lukujen laskutoimitukset eroavat rationaalilukujen laskutoimituksista (Siegler ym. 2011, 275). Erityisesti tässäkin pro gradu -tutkielmassa tutkitussa suhteen laskemisessa yleisin virhe on käsittää suhde additiivisena funktiona multiplikatiivisen funktion sijaan (Ben-Chaim ym. 2012, 28). Additiivinen funktio on oppilaille tunnetumpi aiemmista opinnoista, jolloin sen laskusäännöt otetaan käyttöön myös suhdelaskuissa.

Kirjallisuudessa voidaan löytää ilmiöitä, joissa rationaaliluvut eroavat luonnollisista luvuista (Jo Van Hoof ym. 2017). Ensimmäisessä ilmiössä pohditaan lukujen tiheyttä. Luonnollisille luvuille on aina löydettävissä seuraavaksi suurempi luku, mutta rationaaliluvuilla tätä ominaisuutta ei ole olemassa. On osoitettavissa, että jokaisen kahden erisuuren rationaaliluvun välille mahtuu ääretön määrä rationaalilukuja, kun taas kokonaislukujen väliin mahtuu rajallinen määrä (Vamvakoussi & Vosniadou 2010, 181; Merenluoto 2001, 47). Toisaalta tutkimuksien mukaan monet oppilaat alakoulusta lukioon asti näkevät rationaaliluvut diskreetteinä lukuina luonnollisten lukujen tapaan (Aktas, Apaydin & Aktas 2014, 287). Osaltaan myös tämän vuoksi rationaalilukujen ymmärtäminen on vaikeampaa, kun niiden ominaisuudet eivät ole vastaavat kuin luonnollisilla luvuilla. Toisessa ilmiössä tutkitaan luvun esittämiseen käytettyjen numeroiden lukumäärää. Kun luonnollisen luvun numeroiden määrä kasvaa, myös tämän arvo kasvaa. Desimaaliluvuilla tämä ei pidä paikkaansa – vähemmän desimaaleja (numeroita) sisältävä luku voi olla suurempi kuin enemmän desimaaleja sisältävä luku. Tätä ilmiötä Kastberg ja Morton (2014, 315) kutsuivat ”pidempi on suurempi”-ilmiöksi (longer-is-larger). Kolmanneksi ilmiöksi nostetaan se, että luonnollisten lukujen aritmetiikka yleistetään aiemmista opinnoista. Tästä voi jäädä kuvitelma, että esimerkiksi aina kun kerrotaan luvulla, saadaan suurempi luku. Toisaalta voidaan saada kuvitelma, että aina kun jaetaan, saadaan pienempi luku (Lim 2011, 1081). Vastaavasti Meertin ym. (2010, 245) mukaan oppilaiden ymmärrys murtoluvun osoittajan ja nimittäjän muuttumisessa voidaan jakaa kahteen vaiheeseen. Ensimmäiseksi oppilaat ajattelevat, että murtoluku kasvaa, kun joko jaettava tai jakaja kasvaa. Tämä on Meertin em. (245) mukaan jäänne kokonaislukujen laskusäännöistä. Toisessa vaiheessa oppilaat ajattelevat murtoluvun pienenevän joko jakajan tai jaettavan kasvaessa. Tämä on Meertin em. (245) mukaan vaihe, jossa oppilaat yrittävät ymmärtää murtolukujen laskusääntöjen muuttumista erilaisiksi kokonaislukujen laskusäännöistä.

Kokonaisluvuista rationaalilukuihin laajentumisessa on edellisten tutkimusten ja havaintojen perusteella selkeä ajattelutavan muutos. Kaikki lukujen käsittelyyn ja laskuissa käytetyt funktiot eivät toimi samalla tavalla kuin yhteen- ja vähennyslaskut ja kerrottaessa luvut eivät käyttäydy välttämättä samalla tavalla kuin kokonaisluvuilla kerrottaessa. Tällöin mielestäni oppilaiden valmiiksi muodostamat kokonaisluvuilla toimivat mallit ja odotukset joudutaan rikkomaan ja rakentamaan uusiksi. Tämä vaatii oppilailta rationaalilukujen luonteen ymmärtämistä, mikä voi olla vaikeaa. Siirtyminen rationaalilukuihin tapahtuu jo alakoulussa (OPS 2014), jolloin siellä aloitettu perustyö rationaalilukujen olemuksen ymmärtämisestä on hyvin tärkeää myöhemmissä opinnoissa rationaaliluvun käytön laajentamisen helpottamiseksi.

Bailey, Siegler ja Geary (2014) havaitsivat pitkäaikaistutkimuksessaan, että alakoululaisten rationaalilukujen käsittelytaitoja voidaan ennustaa ensimmäisellä luokalla opittujen luonnollisten lukujen käsittelytaidon perusteella. Tutkimuksessa erotettiin kaksi selvää ilmiötä – mikäli oppilas osasi hahmottaa eri luonnollisten lukujen suuruuksia, hän todennäköisemmin osasi hahmottaa myös rationaalilukujen suuruuksia myöhemmässä vaiheessa opintoja. Toinen havaittu ilmiö oli, että oppilaan ensimmäisellä vuosiluokalla osoittamat kyvyt luonnollisilla luvuilla laskemisessa ennustivat hänen kykyään laskea rationaaliluvuilla. Oppilaiden osatessa matematiikkaan liittyvät perustaidot hyvin on mielekästä ajatella seuraavien asioiden oppimisen olevan helpompaa.

Clarke ja Roche (2009, 132) havaitsivat, että 6. luokkalaisilla oli vaikeuksia vertailla murtolukujen suuruuksia. Erityisesti oppilailla oli vaikeuksia vertailla lukuja, joissa lukujen nimittäjät eivät olleet toistensa moninkertojia. Murtolukujen suuruuden vertailu kertoo oppilaan kyvystä muodostaa suhteellinen suuruus eri murtoluvuille. Tämä vertailu voidaan tehdä suoraan murtoluvuilla tai muuttaen ne esimerkiksi desimaaliluvuiksi tai konkreettisiksi pinta-aloiksi. Mikäli oppilaat eivät ymmärrä, kuinka isoja lukuja murtoluvut ovat todellisuudessa, on niillä laskemisen vaikeus myöhemmissä opinnoissa ymmärrettävää.

Ratkaisuja murtolukujen opettamiseen on etsitty jo pitkään, mutta tulokset ovat olleet heikkoja (Tian & Siegler 2018, 352). Tämän vuoksi Tian ja Siegler tutkivat desimaalilukujen ja murtolukujen opetusjärjestyksen muuttamista. Heidän mukaansa murtoluvut opetetaan usein ennen desimaalilukuja, kuten myös tässä pro gradu -tutkielmassa tutkittu Laskutaito-kirjasarja tekee (Laskutaito 3, 24–36). Tutkimuksessa havaittiin, että desimaalilukujen opettamisella ensin saavutetaan tietyissä tilanteissa etuja, mutta yleisesti se ei ollut parempi kuin murtoluvuista desimaalilukuihin siirtyminen. Moseley ym. (2007, 166) ovat kertoneet aasialaisten opettajien hallitsevan murtolukujen eri esitysmuodot paremmin kuin amerikkalaisten opettajien. Yhdeksi selittäväksi tekijäksi he esittävät Aasiassa olevan matemaattisen kulttuurin, joka perustuu kymmenjärjestelmään ja desimaalilukuihin, kun taas amerikkalainen on murtolukukeskeinen. Lisäksi amerikkalaiset oppikirjat painottavat selkeästi eniten esitysmuotoa osa kokonaisuudesta ja aasialaiset esittelevät monipuolisesti kaikkia esitysmuotoja (Moseley ym. 2007, 167). Suomessa pyritään opetussuunnitelman mukaan (OPS 2014) oppimaan rationaaliluvun eri esitysmuotojen käyttämistä, mutta silti Suomessa ollaan Aasian eri maita hieman jäljessä. Tämä on mielestäni yksi syy esimerkiksi aasialaisten ja suomalaisten menestykseen matematiikassa – monen eri rationaaliluvun esitysmuodon tunteminen ja hallitseminen auttaa ymmärtämään rationaaliluvun semantiikkaa ja siten kykyä käyttää niitä myös myöhemmin opinnoissa ja työelämässä.

2.5 Oppikirjat rationaaliluvun käsitteen rakentajina

Suurin osa matematiikan opetuksesta tapahtuu oppikirjoja apuna käyttäen. Oppikirjoja on saatavilla monenlaisia ja opetussuunnitelma ei aseta tarkkoja etenemisjärjestyksiä eri asioille. Eri kirjasarjat käyvätkin läpi eri aihealueita eri järjestyksessä. On siis perustelua tutkia matematiikan oppikirjoja rationaaliluvun eri esitysmuotojen esiintymisen ja käsittelyjärjestyksen suhteen.

Joutsenlahti (2016, 99) on tutkinut murtoluvun käsitteen esiintymistä oppikirjoissa aina 1800-luvun oppikirjoista lähtien. Joutsenlahti teki havainnon, että oppikirjat ovat 1800-luvulla ja 1900-luvun alussa heijastaneet oppikirjan kirjoittajan tulkintaa ja käsityksiä matemaattisista käsitteistä. Tänä päivänä matematiikan oppikirjat heijastavat eri maiden opetussuunnitelmia (Monaghan 2013, 4). Tämän vuoksi suurin osa oppikirjasarjoista käy samat asiat samoina vuosikursseina läpi. Tämä ei kuitenkaan kumoa sitä, etteikö kirjoittajan oma käsitekuva näkyisi oppikirjassa ja siten eri oppikirjoissa olisi eri rationaaliluvun käsitekuva.

Tässä tutkimuksessa yhtenä tutkimuskysymyksenä on selvittää yhden kirjasarjan rationaaliluvun käsitekuva ja erityispainona rationaaliluvun eri esitysmuotojen välisten yhteyksien käsitteleminen. Tutkimuksessa käydään lävitse Laskutaito-nimisen matematiikan kirjasarjan peruskoulun matematiikan oppikirjallisuus vuosiluokille 1–8, jota tutkimuksessa olevan koulun oppilaat ovat käyneet läpi.

Oppilaat, jotka osallistuivat tähän tutkimukseen, ovat käyneet koko alakoulunsa vuoden 2004 opetussuunnitelman perusteiden mukaan ja yläkoulunsa 2014 vuoden mukaan (OPS 2004 & 2014). Seuraavaksi esittelen, miten vuoden 2004 OPS käsittelee rationaalilukuja ja sen eri esitysmuotoja, jotka on tähän tutkimukseen valittu. Lisäksi vertailen niitä uudempaan, vuoden 2014 OPS:n tapaan käsitellä rationaalilukuja ja sen esitysmuotoja.

Vuoden 2004 opetussuunnitelman perusteissa mainitaan rationaaliluku -termi vain kerran. Tämä maininta tehdään luetellessa vuosiluokkien 6–9 keskeisiä lukujen ja laskutoimisten sisältöä (OPS 2004, 163–164). Tässä se on lueteltuna muiden lukujoukkojen kanssa. Vuonna 2014 ilmestyneessä OPS:ssa rationaaliluku mainitaan jo vuosiluokilla 3–6 käsitteenä, missä oppilaat pyritään tutustuttamaan positiivisiin rationaalilukuihin. Vuosiluokille 7–9 oppilaan tulee kehittää rationaaliluvuilla laskemisen taitoa molempien opetussuunnitelmien mukaan.

Murtoluku mainitaan vuosiluokkien 1–2 tavoitteissa molemmissa OPS:ssa (OPS 2004, 160; OPS 2014, 129). Molemmissa opetussuunnitelmissa pyritään saavuttamaan yksinkertaisten murtolukujen ymmärtäminen. Kummankin OPS:n vuosiluokille 3–5 ja 3–6 kuuluu murtoluvun käsitteet, muunnokset sekä murtoluvun, desimaaliluvun sekä prosentin välisten yhteyksien ymmärtäminen. Myöhemmät luokat sisältävät molemmissa OPS:ssa murtoluvuilla laskemisen laajentamista yksinkertaisista luonnollisella luvulla kertomisesta sekä yhteenlaskusta toisilla murtoluvuilla kertomiseen ja jakamiseen.

Jakolasku mainitaan OPS 2004:n vuosiluokkien 1–2 keskeisissä sisällöissä. Tämän jälkeen se sisältyy jaollisuuteen ja eri lukujen laskutoimitusten yhteyteen vuosiluokilla 3–

9. Vuoden 2014 OPS:ssa jakolaskuun tutustutaan 1–2 vuosiluokilla, jolloin pyritään muodostamaan kerto- ja jakolaskun välisen yhteyden pohja. Vuosiluokilla 3–5 jakolaskua opetellaan ositus- ja sisältöjakotilanteissa. Myöhemmin se vastaavasti on osa muuta matematiikan opetusta. Osamäärä-termiä ei mainita kummassakaan OPS:ssa.

Suhde on mainittu ensimmäisen kerran vuosiluokilla 1–2 vuoden 2004 OPS:ssa. Sen tarkoituksena on pystyä havaitsemaan avaruudellisten kuvioiden välisiä suhteita. Tämä todennäköisesti viittaa kuvioiden välisten mittasuhteiden alustamiseen myöhempiä vuosiluokkia varten. Vuosiluokilla 3–5 oppilaan tulee osata jo suurentaa ja pienentää kuvioita annetussa suhteessa. Vuosiluokilla 6–9 keskeisiin sisältöihin kuuluu suhde ja verrannollisuus. Vuoden 2014 OPS:ssa vuosiluokilla 3–6 suhteen käsite on korvattu geometrian yhteydessä sanalla “mittakaava”, missä sitä käytetään suurennusten ja pienennösten tekemiseen. Vuosiluokilla 1–2 ja 7–9 ei mainita suhdetta eikä mittakaavaa, mutta se voidaan tulkita sisältyvän vastaavaan ainekseen kuin vuoden 2004 OPS:ssa on kyseisinä vuosiluokkina kuulunut. Kuitenkin mielenkiintoista on, että käsitettä ”suhde” ei käytetä enää vuoden 2014 OPS:ssa.

Lukusuoran käsite tulee ensimmäisen kerran vastaan vuosiluokkien 1–2 keskeisissä sisällöissä laskutapoihin ja välineiden käyttöön liittyen sekä hyvän osaamisen merkeissä lukusuoran käyttönä luvun esittämiseen. Lukusuoran käsitettä ei käsitellä sen jälkeen vaan se on yhteydessä muihin mittoihin. Mittoja ja mittauksen suorittamista on aina 1–9 luokalle. (OPS 2004, 158–167) Vuoden 2014 OPS:ssa mittaamisen periaatteen ymmärtäminen kuuluu vuosiluokille 1–2 ja jatkuu aina 9 vuosiluokalle asti. (OPS 2014, 128–130, 234–239, 374–379)

Taulukossa 1 on tiivistettynä vertailu rationaalilukuun liittyvien termien ensiesiintymiset eri opetussuunnitelmissa. Taulukosta havaitaan, että opetussuunnitelmissa käsitellään samat termit samaan aikaan lukuun ottamatta rationaaliluvun ja suhteen käsitteitä, jotka käsitellään vuoden 2014 OPS:ssa myöhemmin. Molempien OPS:ien etenemisjärjestyksen perusteella oppilaat ovat jo 7. ja 8. luokilla tutustuneet rationaalilukuihin ja todennäköisesti suureen osaan sen esitysmuodoista. Yläkoulussa oppilaat kehittävät suurimman osan näistä laskutaitoja, jolloin on mielekästä tutkia heidän osaamistaan rationaaliluvun eri esitysmuotojen hallitsemisesta. Toisaalta on myös mielenkiintoista nähdä, miten heidän käyttämänsä kirjasarja, Laskutaito, on käsitellyt näitä eri esitysmuotoja. Opetussuunnitelmat eivät tarkenna, kuinka eri esitysmuotojen välisiä yhteyksiä tulisi käsitellä ja missä vaiheessa. Tämä jätetään oppikirjojen tekijän vastuulle.

Taulukko 1 Rationaalilukuun liittyvien termien ensimmäiset esiintymiset taulukoituna opetussuunnitelmittain. (OPS 2004 & 2014)

Termi	**OPS 2004**	**OPS 2014**
Rationaaliluku	6.–9. luokka	3.–6. luokka
Murtoluku	1.–2. luokka	1.–2. luokka
Jakolasku	1.–2. luokka	1.–2. luokka
Suhde	1.–2. luokka	3.–5. luokka (mittakaava)
Lukusuora	1.–2. luokka	1.–2. luokka

3 AINEISTO JA MENETELMÄT

3.1 Tutkimuskysymykset ja tutkimuksen tavoite

Teoriaosassa pohdittiin rationaalilukujen opetuksen vaikeutta ja syitä siihen. Aihepiirissä mielenkiinto heräsi oppilaiden kykyyn tunnistaa erilaisia rationaaliluvun esitysmuotoja. Tässä pro gradu -tutkielmassa pyritään löytämään vastausta seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Mitä eri rationaaliluvun representaatioita oppilaat tuntevat?
2. Miten oppilaat tunnistavat suhde -käsitteen ja murtoluvun käsitteen annetuista kuvioista?
3. Minkälainen yhteys on matematiikan opinnoissa menestymisen ja eri representaatioiden tuntemisen välillä?
4. Miten oppilaiden aiemmassa kurssikirjallisuudessa otetaan kantaa rationaaliluvun eri representaatioihin?

Ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä paneudutaan oppilaiden kykyyn tunnistaa rationaaliluvun representaatioita. Motivaationa tämän kysymyksen taustalla on selvittää, mitkä rationaaliluvun representaatiot esiintyvät oppilaiden vastauksissa useimmiten ja mitkä ovat harvinaisempia tai jopa kokonaan unohtuneet.

Toisessa tutkimuskysymyksessä selvitetään oppilaiden kykyä tunnistaa ja erottaa suhteen ja murtoluvun käsitteet toisistaan. Suhteen käsite on muista rationaalilukujen representaatioista eriävä sen multiplikatiivisuuden takia ja sen erottaminen erityisesti osasta kokonaisuutta on tärkeä osa matemaattista osaamista. Suhteelle nimittäin voidaan käyttää samanlaista merkintätapaa kuin murtoluvulle, jolloin näiden tunnistaminen eri käsitteiksi on tärkeää.

Kolmannessa tutkimuskysymyksessä pyritään selvittämään, voiko matematiikan opinnoissa menestymisestä päätellä rationaaliluvun eri esitysmuotojen tunnistamistaitoa. Tätä testataan selvittämällä, onko murtolukujen suuruusvertailussa ja suhdelaskutehtävässä menestymisellä ja matematiikan arvosanalla yhteyttä erilaisten rationaaliluvun esitysmuotojen tuntemiseen ja tietämiseen. Tämän toivotaan kertovan, ovatko laskutaito ja ymmärrys yhteydessä toisiinsa vai ovatko ne erilliset taidot.

Neljännessä tutkimuskysymyksessä tutustaan oppilaiden aiemmissa matematiikan opinnoissa käytettyyn kirjallisuuteen ja selvitetään siitä, mitä eri rationaaliluvun representaatioita siinä esitellään, miten ne esitellään ja erityisesti mitä eroavaisuuksia niiden välille on esitetty. Näitä havaintoja peilataan oppilaiden löytämiin representaatioihin ja selvitetään, näkyykö kirjasarjan mahdollinen painotus tiettyihin representaatioihin oppilaiden vastauksissa.

3.2 Tutkimuslomakkeen laadinta

Tutkimuskysymyksiin pyritään löytämään vastauksia teetättämällä oppilailla tutkimuslomake sekä tutkimalla oppilaiden käyttämää oppikirjasarjaa. tutkimuslomakkeen tarkoituksena on sekä mitata oppilaiden rationaaliluvun eri esitysmuotojen tunnistamista että mitata yksinkertaisten, lyhyiden laskujen osaamista. Näiden erilaisten tehtävien avulla saadaan vastattua tutkimuskysymyksiin 1–4. Kyselylomake on tutkielman lopussa liitteenä 1.

Tutkimuslomake alkaa osiolla, jossa kysytään taustatietoja oppilaasta luokittelua varten. Ensimmäiseksi kysytään oppilaan sukupuoli, ja vastausvaihtoehdoiksi valikoitui poika, tyttö, muu sekä en halua kertoa. Tähän jaotteluun päädyttiin siksi, että nyky-yhteiskunnassa on mielestäni tarjottava oppilaalle mahdollisuus osoittaa olevansa jotain muuta sukupuolta tai olla kertomatta tätä. Seuraavaksi kysytään oppilaan vuosiluokkaa, sillä tutkimus tehtiin 7. ja 8. luokan oppilaille. Kolmantena asiana kysyttiin oppilaan edelliseen välitodistukseen annettua matematiikan arvosanaa. Tällä luotiin mahdollisuus yrittää löytää yhteyttä rationaaliluvun esitysmuotojen tuntemisen ja yleisen matematiikan osaamisen välillä. Lopuksi luokittelukysymyksenä kysyttiin, kuinka vaikeaksi murtoluku koettiin käsitteenä matematiikan opetuksessa. Tämän kysymyksen avulla pyrittiin löytämään vastausta kysymykseen, onko murtolukujen vaikeaksi kokeminen ja eri rationaaliluvun esitysmuotojen hallinnan välillä yhteyttä. Oppilaille tehtiin selväksi, että näiden kysymysten avulla ei voida identifioida yksittäistä oppilasta vastausten joukosta ja heillä kaikilla on täysi anonymiteetti.

Vastausten luokitteluun tarkoitettujen kysymysten jälkeen on neljä rationaalilukuihin liittyvää tehtävää. Ensimmäiset tehtävät ovat laadittu Joutsenlahden ja Perkkilän aikaisempaan tutkimukseen. (Joutsenlahti & Perkkilä, 2018, artikkelin käsikirjoitus) Ensimmäisessä tehtävässä on annettu murtolukumerkintä “ $\frac{2}{3}$ ” ja oppilaita pyydettiin kertomaan eri merkityksiä tälle merkinnälle. Tehtävässä haettiin vastauksia tutkimuskysymyksiin 1–3 Tehtävänanto oli puoliavoin, sillä oppilaille haluttiin antaa tilaa omille ajatuksille ja merkinnän tulkinnoille. Tehtävä osoittautui antoisaksi vastauksiltaan ja oppilaat löysivätkin eri representaatioita.

Tehtävässä 2 annettiin viisi erilaista merkintää ja kuvaa. Näistä kuvista oppilaan tuli kertoa, mitä merkintä tai kuva voisi kuvata, mahdollisesti tätä selittäen sanallisella esimerkillä. Tehtävänanto oli ensimmäisen tehtävän kaltaisesti puoliavoin, jotta oppilaat pystyivät luovasti kertomaan oman näkemyksensä kuvan takana olevasta ilmiöstä. Oppilaat pysyivät pääsääntöisesti rationaalilukuihin liittyvissä asioissa, mikä osoitti tehtävänannon tulleen ymmärretyksi.

Ensimmäisessä kuvassa oli ensimmäisestä tehtävästä tuttu merkintä “ $\frac{2}{3}$ ”, jolla oli tarkoitus löytää ainakin osan kokonaisuudesta ja jakolaskun käsitteet. Toisessa kuvassa oli merkintä “≈0,67”, jolla haettiin osamäärää. Kolmas ja neljäs kuva olivat samantyyppiset. Kolmannessa kuvassa oli kolme ruutua kiinni toisissaan, joista kaksi vasemmanpuoleista olivat väritetty mustaksi ja oikeanpuoleisin laatikko oli harmaa. Neljännessä oli viisi ruutua erillään – kaksi ylempänä väritettynä mustaksi ja kolme alempana väritettynä harmaaksi. Tehtävät olivat samantyyppiset siksi, että niillä pyrittiin etsimään tulkinnat “kaksi kolmasosaa” ja “kahden suhde kolmeen” eli representaatiot osa kokonaisuudesta ja suhde. Viidentenä ja viimeisenä kuvana oli osa lukusuorasta, jossa noin luvun 0,67 kohdalla oli viiva ja sitä osoitettiin nuolella. Tällä merkinnällä pyrittiin hakemaan representaatiota “mitta”, joka löytyikin hyvin monesta vastauksesta. Tehtävä 2 kokonaisuudessaan pyrki vastaamaan tutkimuskysymyksiin 1, 2 ja 3.

Kolmannessa tehtävässä oli perinteinen mehutiivistetehtävä, jossa kerrottiin tarvittavan veden määrä mehutiivisteen määrään nähden. Mehutiivisteen ja veden määrien suhde oli 1:3, jolloin laskut olivat yksinkertaiset eivätkä vaatineet paljoa välivaiheita. Oppilaan tuli laskea, paljonko vettä tarvitaan, kun halutaan käyttää yksi litra mehutiivistettä. Lisäksi oppilaan piti määrittää tällöin valmiin mehun määrä ja valmiissa mehussa olevan mehutiivisteen määrä prosentteina koko mehusta. Tehtävänanto oli suljettu, sillä tehtävän tarkoitus on mitata laskutaitoa, jolloin vastaukset ovat joko oikein tai väärin.

Neljännessä eli viimeisessä tehtävässä testataan oppilaiden kykyä vertailla kahden murtoluvun suuruuksia. Tehtävä koostui kahdeksasta murtolukuparista, joiden väliin oppilaan tuli laittaa “pienempi kuin”-merkki (<) tai “suurempi kuin”-merkki (>) osoittamaan, kumpi murtoluvuista on suurempi. Ensimmäiset murtolukuparit olivat helpompia ja vaikeutta kasvatettiin myöhempiin murtolukupareihin. Murtolukujen suuruuden vertailulla pyrittiin selvittämään oppilaiden kykyä hahmottaa murtolukujen suhteellisia suuruuksia ja siten saada käsitystä heidän murtolukujen ymmärtämisen tasosta. Näitä tietoja verrattiin rationaaliluvun eri esitysmuotojen löytämiseen. Tätä tietoa käytetään tutkimuskysymyksiin 2 ja 3 vastaamiseen. Ensimmäiset murtolukuparit osattiin vertailla oikein, mutta myöhemmissä pareissa tuli osalla oppilaista hankaluuksia. Kuten 3 tehtävässä, tehtävänanto oli suljettu vastausten ollessa joko oikein tai väärin.

Kokonaisuutena tehtävälomake suunniteltiin niin, että sen vastaamiseen kuluu 20–45 minuuttia, joka oli koululta annettu aikaraja tutkimuksen tekemiselle. Tehtävälomake haluttiin myös pitää yhden kaksipuolisen paperin mittaisena, jotta se ei muodostuisi liian pitkäksi ja lannistaisi oppilaita pituudellaan. Rakenteen haluttiin olevan selkeä ja pelkistetty, jolloin se muistuttaisi tavallista peruskoulun matematiikan koetta eikä se rakenteellaan vierastuttaisi oppilaita. Oppilaat olivat kaikki hyvin suomea osaavia ja puhuvia, jolloin kielimuuri ei tullut esteeksi ymmärryksessä.

3.3 Aineiston keruu

Aineisto päätettiin kerätä yhdessä Kanta-Hämeen kunnan yläkoulussa. Koulu valikoitui sen perusteella, että olin itse käynyt kyseisen yläkoulun ja halusin tehdä tutkimuksen koulussa, jossa tutkimuksia ei usein tehdä. Yhteydenpito koulun rehtoriin aloitettiin maaliskuun lopulla vuonna 2018 ja itse tutkimusaineiston keruu koululla tehtiin saman vuoden huhtikuun lopulla.

Tutkimukseen valikoitui kaksi 7. ja 8. luokkaa, joista tutkimukseen vastanneista oppilaista muodostui tutkimuksen 69 vastauksen aineisto. Luokat valikoituivat apulaisrehtorin mukaan siten, ettei koululle eikä oppilaille ole tutkimuksesta haittaa. Tutkimuslupa sovittiin rehtorin kanssa maaliskuussa vuonna 2018. Oppilaiden vanhemmille lähetettiin apulaisrehtorin toimesta viesti viikko ennen tutkimuksen suorittamista, jossa kerrottiin oppilaan osallistumisesta tutkimukseen. Yhden oppilaan huoltaja oli yhteydessä apulaisrehtoriin vaatien tutkimusluvan myöntämistä, mutta apulaisrehtori pyysi minua olemaan henkilökohtaisesti häneen yhteydessä tilanteen selvittämiseksi. Hänen kanssaan lopulta sovimme, että oppilas ei osallistu tutkimukseen.

Tutkimus suoritettiin oppilaiden normaalien oppituntien lomassa yhdessä opettajan kanssa. Koulun toimesta tutkimus suoritettiin kahdessa vierekkäisessä luokassa samaan aikaan kahdesti, jolloin jouduin seuraamaan tutkimuksen etenemistä vaihdellen kahden luokan välillä. Aloitin oppitunnin esittelemällä itseni ja tutkimuksen tarkoituksen oppilaille. Jaettuani tutkimuslomakkeen oppilaille kävin heidän kanssaan lomakkeen eri kohdat läpi ja varmistin, että sekä tehtävänannot että tutkimukseen osallistumiseen ja luokitteluun tarkoitettuihin kysymyksiin vastaamiseen liittyvä anonymiteetti ymmärrettiin. Tämän jälkeen annoin aloittaa tutkimuksen ja hetken kuluttua vaihdoin luokkaa ja tein vastaavasti toiselle luokalle. Kun molempien luokkien oppilaille oli jaettu tutkimuslomakkeet ja he tekivät sitä, vaihtelin luokkien välillä lopputunnin, kunnes kaikki olivat saaneet lomakkeen täytettyä. Keräsin tehtävälomakkeet talteen ja säilytin niitä kotona.

3.4 Aineiston analyysimenetelmät

Tässä tutkimuksessa aineiston tulkintaan ja tutkimiseen käytetään ja yhdistetään kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia menetelmiä. Kvantitatiivista analyysiä käytetään aineistoon liittyvien erilaisten vastaajaryhmien erottamiseen ja yhtäläisyyksien etsimiseen. Kvalitatiivista analyysiä käytetään oppilaiden sanallisten vastauksien saamiseen tiettyjen kategorioiden alle sekä osaamisen arviointiin (Onwuegbuzie & Leech, 2004).

Rationaalilukujen osaamisesta yläkoulussa ei ollut valmiiksi aineistoja, joten aineisto päätettiin kerätä itse. Koska tässä tutkimuksessa kerättiin aineisto itse ja aineiston kerääjällä ei ollut aiempaa kokemusta aineiston keräämisestä, päätettiin aineiston analyysissä lähteä *aineistolähteisen analyysin* teoriasta liikkeelle. Sarasjärvi ja Tuomi (2018, 173) kuvaavat aineistolähtöistä analyysiä menetelmäksi, jossa analyysiyksiköt valitaan tässä tapauksessa empiirisestä aineistosta siten, että tutkimuksen tarkoitus ja tavoite täyttyvät. Koska tehtävälomakkeeseen päätettiin sisällyttää rationaalilukujen esitysmuotojen tunnistusta ja laskutaitoa mittaavia tehtäviä, antoi se mahdollisuuden tutkia monenlaisia ilmiöitä. Tutkimusta lähdettiin tekemään avoimin mielin ja siten tutkimuskysymykset tarkentuivat vasta aineiston läpikäymisen jälkeen.

Tämän kerätyn empiirisen aineiston jokainen lomake koostui neljästä tehtävästä, joista kahteen ensimmäiseen tehtävään oli pääasiassa vastattu sanallisesti, mutta vastaukset sisälsivät myös numeroja ja symboleja. Tehtävien 3 ja 4 oleellisin sisältö on numeerisessa vastauksessa, jotka olivat helposti muutettavissa kvantitatiiviseksi dataksi. Koska tehtävien 1 ja 2 vastauksia haluttiin myös tulkita määrällisesti, tarvittiin niiden muuttamiseksi kvantitatiiviseksi dataksi analyysiä. Tässä pro gradu -tutkielmassa käytettiin *mixed methods*-lähestymistapaa (Sarasjärvi & Tuomi 2018, 78–79), sillä siinä sekoitetaan laadullista ja määrällistä menetelmää. Tässä tutkimusasetelmassa oli vaikeaa luoda strukturoitua kyselylomaketta, jossa ei paljastettaisi niitä asioita, joita tutkimus haluaa mitata. Olen Sarasjärven ja Tuomen (2018, 80) kanssa samaa mieltä siitä, että tällaisessa tilanteessa voidaan yhdistää tutkijan omaa tulkintaa laadullisesti ja luoda siten tutkimuksen kannalta sopiva määrällinen aineisto. Tämä luo ongelmaksi tutkijan oman tulkinnan subjektiivisuuden. Mixed methods-lähestymistapa on itsessään hyvin laaja, sillä se sisältää sekä laadullisen että määrällisen menetelmän eri alamenetelmät. Tulee siis rajata tietyt alamenetelmät, joita tutkimuksessa yhdistetään.

Tutkimuslomakkeen avoimuus erilaisille lähestymisille rationaalilukujen tutkimiseen kannustaa tutkimaan ensin sisältöä ja sitten miettimään, mihin tällä datalla voi antaa vastauksen. *Sisällönanalyysiksi* kutsutaan menetelmää, jossa tutkimuslomaketta tulkitaan systemaattisesti ja objektiivisesti saaden aikaan tiivistetty ja yleistetty kuvaus halutusta ilmiöstä (Sarasjärvi & Tuomi 2018, 117). Kuitenkin Grönforsin ja Vilkan (2011, 94) mukaan aineisto voidaan vain järjestellä sisällönanalyysin avulla, mutta siitä ei voida tehdä johtopäätöksiä. Lisäksi sisällönanalyysilla pyritään Sarasjärven ja Tuomen (2018, 119) mukaan kuvailemaan sanallisesti aineistoa, mikä vastaa vain laadulliseen tutkimukseen.

Johtopäätöksien tekemiseksi ja muihin tutkimuksessa mitattaviin datoihin yhdistämiseksi tarvitsee sisällönanalyysia hieman muokata. Tutkimuksessa on tarkoitus lopulta saada niin laadullista kuin määrällistä aineistoa, vaikka aineiston laajuus on suhteellisen pieni. Nämä tutkimuslomakkeen tehtävien 1 ja 2 sanalliset vastaukset halutaan saada laskettavaan muotoon, jolloin voidaan käyttää *aineiston kvantifiointia* (Grönfors & Vilkka 2011, 93). Kun sanalliset vastaukset on saatu jaoteltua kontekstinsa mukaan määrälliseen muotoon, on mahdollista tehdä kvantitatiivista vertailua. Tällaista kvantifiointia ja vastausten toisistaan erittelyä kutsutaan *sisällön erittelyksi* (Sarasjärvi & Tuomi 2018, 119).

Aineiston kvantifiointi tulee suorittaa tietyn järjestelmän mukaan. Tutkimuslomakkeen tehtävien 1 ja 2 tehtävänannot olivat puoliavoimia ja antoivat oppilaille mahdollisuuden kertoa omin sanoin, miten tulkitsee ja käsittää tietynlaisen merkinnän. Kuitenkin tehtäviä suunnitellessa ja niiden tarkoitusta miettiessä tiedettiin, että näiden tehtävien vastauksista etsitään rationaaliluvun eri representaatioita. Eri representaatioita oli valittu teoriaosuudessa viisi, joiden avulla vastauksia haluttiin luokitella. Oppilaat antoivat vastauksia monipuolisesti ja merkittävässä osassa vastauksia ei sanota suoraan, mikä esitysmuoto on kyseessä. Tällöin epäselvien vastausten luokittelu mahdollisuuksien mukaan näihin viiteen tyyppiin on tutkijan vastuulla. Koska tässä tutkija toimii havainnoijana, on hänen ajatteluaan ohjaamassa hänen oma käsityksensä taustalla olevasta teoriasta sekä omat muistot ja tiedot. Tämä on yksi aineistolähtöisen analyysin heikkous, joka tunnetaan myös nimellä *havainnoinnin teoriapitoisuutena* (Sarajärvi & Tuomi 2018, 7).

Havainnoinnin teoriapitoisuutta halutaan korjata ja kontrolloida *teoriaohjaavalla analyysillä*, missä vastauksia pyritään luokittelemaan eri ryhmiin teoriaan pohjautuvan luokittelun avulla. Tällä ratkaisulla myönnetään tutkijan oma subjektiivisuus havainnoinnissa ja pyritään tekemään jaottelu mahdollisimman pitkälle teorian avulla (Sarajärvi & Tuomi 2018, 173). Tämänkin analyysin kanssa ongelmaksi nousee se, että osa vastauksista ei ole ilman tulkintavaraa mahdollista asettaa edustamaan tiettyä tyyppiä. Tällaisia tapauksia varten tullaan käyttämään *abduktiivista päättelyä*. Abduktiivisessa päättelyssä hyväksytään tutkijan käyttämä aineistolähtöisyys sekä aiemmin muodostuneet mallit aiheesta ja niiden yhdisteleminen vastauksen luokitteluun jopa väkisin (Sarajärvi & Tuomi, 2018, 172). Tällöin tutkijan kuitenkin tulee Sarasjärven ja Tuomen (2018, 172) mukaan tehdä läpinäkyväksi omat ratkaisunsa joiden avulla tulkinnat on tehty. Tässä tutkimuksessa tehdyt tulkinnat ja valinnat vastausten luokittelemiseen eri representaatioiksi esitellään kappaleessa 3.5.

Kun tehtävälomakkeen 1 ja 2 tehtävien vastaukset ovat saatettu kvantitatiiviseen muotoon, voidaan niitä käsitellä tilastollisin menetelmin. Kuitenkin aineiston ollessa pieni (n = 69), sen tilastollinen käsittely ei ole mielekästä kuvaamaan kaikkia Suomen yläkoululaisia. (Heikkilä 2014, 15) Tutkimuksessa pyritään löytämään yhteyttä oppilaiden murtoluvun eri esitysmuotojen hallinnan ja murtolukujen suuruusvertailun välillä, jolloin kvantitatiiviset menetelmät ovat tarkoituksenmukaisia. Tässä tutkimuksessa on tarkoituksena tehdä *selittävää eli kausaalista tutkimusta,* jolla Heikkilän (2014, 14) mukaan pyritään löytämään ilmiöiden välisiä syy- ja seuraussuhteita. Kuitenkin aineisto on pieni, jolloin saatavat syy-seuraussuhteet ovat vain suuntaa-antavia. Tätä sisällön erittelyllä kvantifioidun datan avulla saatavaa tietoa yhdistetään laadullisen tutkimuksen teoriaohjaavaan analyysin yhteydessä saatavaan tietoon, jolloin nämä menetelmät täydentävät toisiaan ja antavat kattavamman kuvan ilmiöstä.

3.5 Aineiston käsittely analyysia varten

Tulkinnat, jotka perustellaan, ovat Sarasjärven ja Tuomen (2018, 176) mukaan analyysin teknisen vaiheen alku. Tässä tutkimuksessa vastauksissa olevat samaa esitysmuotoa tarkoittavat eri ilmaisutavat pelkistetään yhden esitystavan alle. Nämä esitysmuodot, joiden alle vastaukset pyritään pelkistämään, on teoriaosiossa valittuja rationaaliluvun eri representaatiomuotoja. Luonnollisesti jos vastaus ei ole tulkittavissa minkään eri representaation alle, luokitellaan se luokkaan “muut”.

Tässä tutkimuksessa aineiston analyysin käytetään sisällön erottelua yhdistettynä teoriaohjaavaan analyysiin. Sarasjärvi ja Tuomi (2018, 169) tulkitsivat Timo Laineen sisällönanalyysin analyysikuvausta, jonka kohtia tässä analyysin etenemisessä mukaillaan. Sisällön erottelua käytettiin tehtävien 1 ja 2 sanallisten vastausten analyysiin. Analyysissä edettiin Timo Laineen analyysikuvauksen mukaisesti.

Ensimmäisessä kohdassa Laineen mukaan tulee päättää aineistosta se, mikä kiinnostaa ja tutkia sitä. Tämä valikoiminen suoritettiin tekemällä monipuolinen aineisto, joka tarjoaa monenlaisille tutkimusaiheille mahdollisuuden. Esimerkiksi rationaalilukujen osaamista voidaan vertailla taustatietoihin tai laskutehtävissä menestymiseen. Tämä oli tutkijan tekemä harkittu ratkaisu.

Toisessa kohdassa aineisto tulee lukea, tehdä päätökset minkä osan datasta ottaa ja erottaa ne erilliseksi osaksi. Kun aineisto oli valmis ja silmäilty läpi, tehtiin päätökset tutkimuskysymysten tarkentamisista. Tällöin myös tutkija kokosi koneelle taulukkotiedoston, johon litteroi vastaukset. Aineistosta päätettiin käyttää hyväksi kaikkia tehtäviä, mutta taustakysymyksistä murtoluvun käsitteen vaikeus jätettiin pois sen vastausten ollessa liian homogeenisia eikä eroja voitu muodostaa järkevästi.

Laineen kuvaamasta kolmannessa kohdassa vastaukset luokitellaan. Tässä tutkimuksessa tutkijan omaan vastausten järjestelyyn tarkoitetun litteroinnin yhteydessä tehtiin alustavaa teemoihin jaottelua – tärkeimmät avainsanat ja -ilmiöt kirjattiin ylös kunkin vastauksen kohdalta. Tästä tiedostosta vastaukset luokiteltiin teorian asettamiin tyyppeihin.

Viimeiseksi Laineen analyysirungossa on analyysin yhteenveto, joka tässä tutkimuksessa tehtiin viimeisenä. Yhteenveto käsitellään tutkimuksen luotettavuuden ja eettisyyden tarkastelua käsittelevässä kappaleessa. Seuraavaksi esitellään tulkinnat, joita tehtiin oppilaiden vastauksien tehtäviin 1 ja 2 saamiseen teoriaosuudessa päätettyihin viiteen eri rationaaliluvun esitysmuotoon.

Osa kokonaisuudesta

Osalla kokonaisuudesta tulkittiin tässä tutkimuksessa niin, että oppilas on jakanut jonkin asian osiin, joista valitaan tietty määrä osia. Tyypillisimmät vastaukset olivat “kaksi kolmasosaa”, “kaksi osaa kolmesta” ja “kaksi kolmesta”. Nämä olivat helppo luokitella osaksi kokonaisuudesta, sillä ne sisälsivät sekä jonkin osaan jakamisen sekä osien ottamisen. Edellisten esimerkkien kaltaiset “2 osaa 3 kokonaisuudesta” ja “kolmesta kaksi” ovat myös selkeästi osia kokonaisuudesta.

Enemmän tulkintaa vaatii “pizzan jako 2/3”. Kirjaimellisesti ottaen voitaisiin tulkita, että pizza jaettaisiin luvulla 2/3, jolloin se olisi osamäärä. Kuitenkin tässä tutkimuksessa tulkitaan niin, että pizza jaetaan osiin, josta otetaan kaksi. Näin päätellään siksi, että se on luonnollisemman ja todellisemman tuntuinen tulkinta.

Suhde

Tutkimuksen analyysissä päädyttiin tulkitsemaan termin ”suhde” käytön lisäksi suhde sellaiseksi, että kahden asian suhteellisia kokoja verrataan toisiinsa. Tätä ei aineistossa ollut havaittavissa montaa eri tapausta. Oppilaat ovat käyttäneet ilmaisuja “2:3 suhde”, “2:3 kahden suhde kolmeen” ja “kahden suhde kolmeen”.

Tehtävälomakkeen tehtävässä 3 on annettu suhteen merkinnäksi 1:3. Tehtävässä tehdään mehua annetulla veden ja tiivisteen suhteella. Eräs oppilas on vastannut tutkimuslomakkeen tehtävään 1 “mehun valmistus”. Tämä olisi luonnollisinta tulkita siten, että oppilas on yrittänyt kertoa suhteesta. Aineiston tulkinnassa huomataan, että hyvin moni oppilas ei osaa laskea suhdetta oikein vaan käsittävän sen osaksi kokonaisuutta. Tämä vastaus päätettiin olla tulkitsematta kuitenkaan suhteeksi, sillä ei voi olla varma, onko tarkoitettu suhdetta vai osuutta kokonaisuudesta.

Toinen oppilaiden vastauksista ilmennyt mielenkiintoinen merkintä on 2:3. Tämä on suhteen merkinnällä kirjoitettu, mutta suomen oppikirjallisuudessa jakolaskulle käytetään samaa merkintää (Laskutaito 3). Tässä tulkitaan, että merkintä 2:3 tarkoittaa jakolaskua, sillä se on oppilaille yleisempi merkintä jakolaskulle kuin suhteelle.

Osamäärä/Jakolasku

Osamäärän käsite esiteltiin teoriaosuudessa niin, että se tarkoittaa joko itse jakolaskua tai sen lopputulosta. Yleisimmät osamäärää kuvaavat vastaukset kuvasivat jakolaskua. Näistä esimerkkeinä muun muassa "kaksi jaettuna kolmella", "2 jaettuna 3", jakolasku" ja "jakolasku 2:3".

Suhteen kohdalla käsiteltiin tapaus "2:3". Eräs oppilas vastasi tehtävän 2 b-kohdassa "jakolaskun tulos", joka on hyväksyttävissä osamäärän lopputulosta tarkoittavaksi. Toinen oppilas oli merkinnyt tehtävän 2 c-kohdan vastaukseksi "jakolasku 2/3", jolloin se tulkitaan jakolaskuksi. Tämä myös osoittaa, että oppilaat voivat tulkita merkinnän "2/3" jakolaskuksi.

Tehtävän 2 b-kohdassa oppilaat käsittivät merkinnän "≈0,67" kuvaavan pyöristämistä ja desimaalilukua. Tässä yhteydessä ilmaistuna pyöristämiseen ja desimaalilukuun viittaavat vastaukset ovat luokiteltu osamääräksi, sillä pyöristäminen nähdään osamäärän vastaukseen liittyväksi operaatioksi muuttaa se desimaaliluvuksi. Desimaaliluku on itsessään jakolaskun lopputulos, jolloin se kuuluu tässä tutkimuksessa osamäärän esitysmuodon määritelmään. Vastaavasti tässä samassa tehtävässä monta vastausta sisälsi termin "prosentti". Tällöin myös vastaus tulkitaan osamääräksi, mikäli sen yhteydessä on annettu kokonais- tai desimaaliluku. Termi "prosentti" ei spesifioi mielestäni riittävän tarkasti esitysmuotoa, mutta mikäli se yhdistetään desimaalilukuun, niin tällöin kyseessä on osamäärän lopputulos. Toinen vaihtoehto olisi tulkita se operaattoriksi, sillä prosentin edessä oleva luku voidaan tulkita kertoimeksi, jolla prosenttia muutetaan. Tässä tutkimuksessa määritellään operaattori jonkin asian tai ilmiön kasvattamiseksi tai pienentämiseksi, mutta prosenttiluvun edessä oleva kerroin ei kasvata itse merkkiä "%". Desimaaliluvut prosenttimerkinnän kanssa tulkitaan osamääräksi.

Operaattori

Murtoluvun esitysmuotona operaattori tulkitaan niin, että jonkin asian kokoa muutetaan pienemmäksi tai suuremmaksi murtoluvulla kertoen. Tyypillisinä esimerkkeinä aineistosta voidaan poimia kuvaukset "2/3 dl jauhoja", "kerrotaan 2/3" ja "2/3 litraa". Näissä

2/3 tulkitaan kertojaksi, jolla esimerkiksi jauhojen ja litrojen määrää pienennetään tai luku kerrotaan luvulla 2/3.

Edelliset esimerkit ovat sanallisesti ilmaistuna hyvin lähellä luokkaa osa kokonaisuudesta. Nimittäin murtolukumerkinnällä “2/3 jauhoja” luetaan “kaksi kolmasosaa jauhoja”. Tällöin se on osa kokonaisuudesta. Toisaalta kirjaimellisesti ottaen murtolukumerkinnällä se on operaattori, sillä “2/3” tulkitaan kertoimeksi, jossa ei erikseen jaeta jauhoja osiin. Vastaavalla päättelyllä myös “2/3 alueesta” ja “pizzasta 2/3” kuuluvat operaattorin alle. Suomessa opetetaan lukemaan tällaiset esimerkit, kuten alueen koko, pinta-ala ja määrä, osana kokonaisuudesta ilman, että siinä puhutaan tästä. Tämän vuoksi nämä tulkinnat tulkittiin tässä tutkimuksessa osiksi kokonaisuudesta. Myös sanallisesti ilmaistu “puolet yhdestä” kuuluu vastaavalla päättelyllä osaksi kokonaisuutta.

Mitta

Viimeisenä luokkana käsitellään mitta, jossa murtoluku kuvaa jonkin asian mittaamista. Eniten yksittäisinä esimerkkeinä aineistossa nostettiin esille lämpömittari sekä lukujana. Erityisesti tehtävän 2 e-kohdassa tuli paljon vastauksia, jotka kuvasivat mittaa. Oppilaat vastasivat esimerkiksi “lämpötila”, “lukujana”, “lämmön mittaaminen” ja “arviointiasteikko”.

Erään oppilaan vastaus tehtävään 2 e oli “koordinaatisto”. Tämä voidaan käsittää mittaan kuuluvaksi, sillä koordinaatisto perustuu etäisyyksiin. Myös tehtävän 2 b-kohtaan vastattu “pituus (0,02 metriä)” on mitta. Eräs oppilas on vastannut tehtävän 2 c-kohtaan “66 % akusta”, jolloin se edellä esitetyn tulkinnan nojalla voitaisiin luokitella osamääräksi. Oppilas on tarkentanut tähän tyyppiin erottaen sen akussa olevan energian määräksi. Tällöin tämä “66 %” tulkitaan akussa olevan energian mitaksi. Tällä tavalla myös tulkitaan samassa alakohdassa olleet vastaukset “2/3 laitteesta latautunut” ja “kuinka täynnä (2/3 täynnä)” mitaksi operaattorin sijaan.

Tämän luokittelun ulkopuolelle jää monia ehdotuksia, joista yleisimmät olivat prosentti- ja murtoluku. Prosenttiluvun tapaus käsiteltiin jo osamäärän kohdalla, mutta vastausta “murtoluku” ei. Murtoluku nähdään tässä tutkimuksessa liian epämääräisenä luokiteltavaksi mihinkään näistä representaatioista. Murtoluku kirjoitettuna ja merkintänä ilman selitystä voi tarkoittaa mitä vain representaatiota, jolloin sen luokittelu on mahdotonta.

4 ANALYYSI

Tässä luvussa oppilaiden käyttämää oppikirjallisuutta ja oppilaiden täyttämiä tutkimuslomakkeita analysoidaan edellisessä luvussa esiteltyjen menetelmien avulla. Ensimmäiseksi käydään lävitse oppilaiden käyttämän oppikirjallisuus ja tutkitaan sen rationaalilukukuvaa. Erityisesti pyritään havaitsemaan kirjasarjan kanta rationaaliluvun eri representaatioiden ja niiden välisten yhteyksien esittämiseen. Tämän jälkeen analysoidaan oppilaiden täyttämät tutkimuslomakkeet.

4.1 Laskutaito -kirjasarjan analyysi

Seuraavaksi käydään vuosiluokka kerrallaan lävitse Laskutaito-kirjasarjan kirjat niin, että niistä esitellään rationaalilukuihin ja niiden esitysmuotoihin liittyvät kohdat.

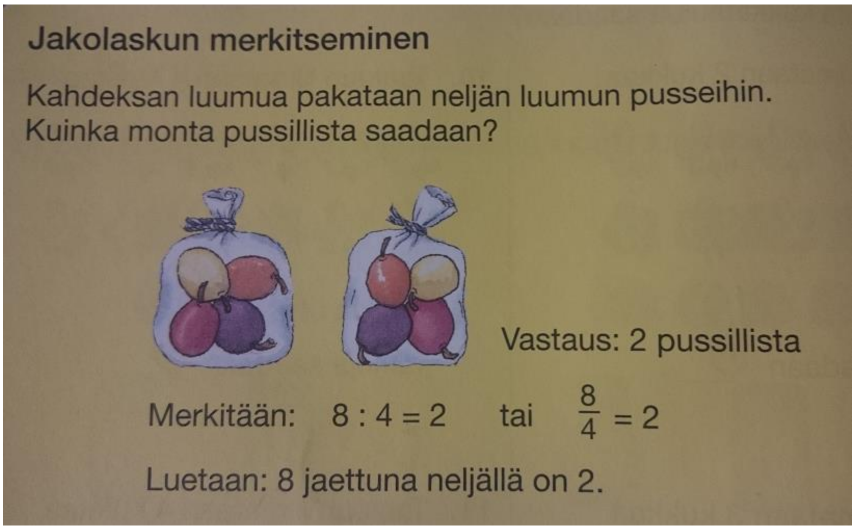
4.1.1 1. – 2. vuosiluokka.

Ensimmäisen vuosiluokan syysosassa ei käsitellä ollenkaan murtolukuja. Vasta 1. vuosiluokan kevätosassa opetellaan mittaamaan viivoittimella. Pituusyksikkönä käytetään vain senttimetriä (cm).

Toisen vuosiluokan syysosassa tutustutaan lukusuoran käsitteeseen. Tällöin lukusuoraa käytetään lukujen 0–100 yhteen- ja vähennyslaskun tukena. Toisen vuoden kevätosaan siirryttäessä oppilaat oppivat mittaamisen ja yksiköiden muuntamisen yhteydessä desimaalimerkinnän, mutta siitä ei vielä puhuta tässä vaiheessa. Kirjassa on esimerkki eurojen merkitsemisestä desimaalipilkulla ja sen tulkinta. Lisäksi mittaamisen yhteydessä käsitellään pyöristämistä ja yksikönmuuntoa laajennetaan pituuden ja painon yksiköihin. OPS:ssa mainittua kokonaisen osittamista (OPS 2014, s. 129) ei ole havaittavista.

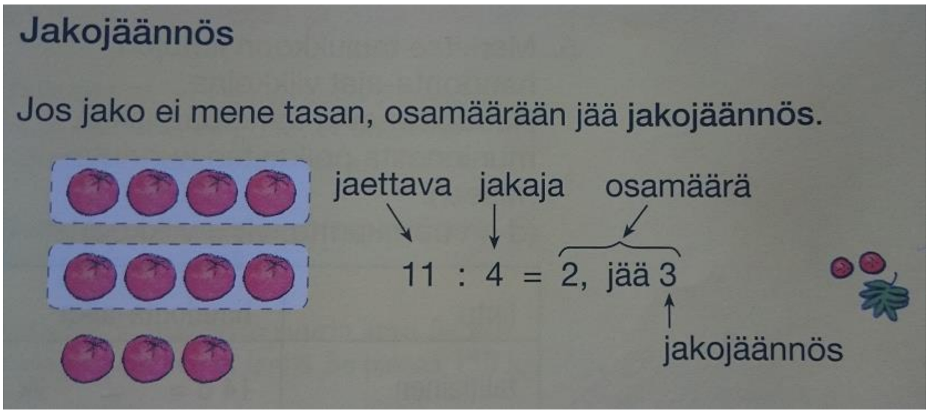
4.1.2 3. – 4. Vuosiluokka

Kolmannella vuosiluokalla opitaan jakolaskun perusteet. Jakolaskun lopputulos on kuitenkin aina kokonaisluku eikä rationaalilukuihin päästä vielä tässä vaiheessa. Jakolaskun yhteydessä opetetaan kaksi eri merkintää jakolaskulle: kaksoispiste ”:” ja murtoluvun poikkiviiva ”-”. Nämä ovat kuvattuna kuvassa 2.



Kuva 2 3. Vuosiluokan syysosassa esitelty jakolaskun merkintä. (Laskutaito 3 syysosa, 40)

Syysosassa käydään vielä lävitse jakojäännös, jonka yhteydessä käydään ensimmäistä kertaa lävitse jakolaskuun liittyviä termejä. Mainitut termit ovat osamäärä, jolla kuvataan jakolaskua; jaettava, jolla kuvataan jaettavaa lukua sekä jakaja, jolla kuvataan lukua, jolla jaetaan. Kuvassa 3 on esimerkki tästä sivusta.

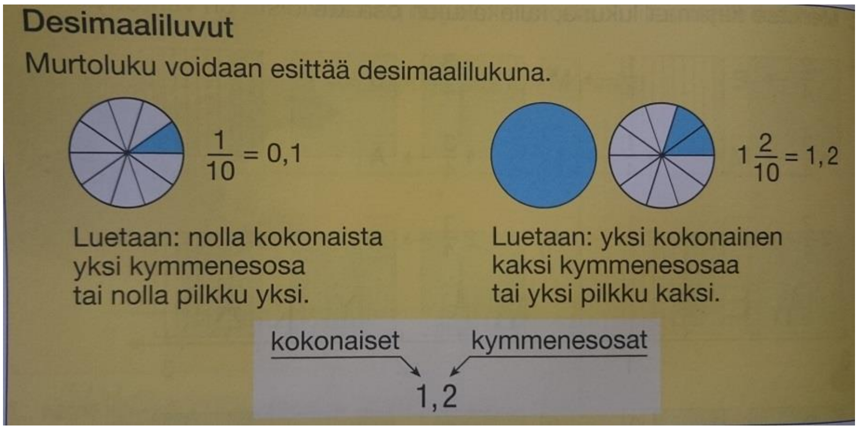


Kuva 3 3. Vuosiluokan kirjassa esitetty jakojäännös, jakolaskun jaettavan, jakajan ja osamäärään esitys. (Laskutaito 3 syysosa, 58)

Kolmannen vuosiluokan kevätosaan siirtymisen jälkeen opetetaan ensimmäisenä murtoluku. Murtoluvulle annetaan pinta-alan avulla määritelmä, jossa kuvataan väritettyjen osien määrää murtoluvun jaettavaksi ja kaikkien osien määrää (joihin kokonaisuus on jaettu) jakajaksi. Liitteen kuvassa 1 on esitetty kirjan malli tästä.

Hieman myöhemmin murtolukujen muiden ominaisuuksien, kuten sekalukumuodon esittämisen jälkeen yhdistetään murtoluvut lukusuoramalliin. Liitteenä 2 on kuva tästä mallista.

Heti lukusuoramallin jälkeen opetetaan, kuinka murtoluvut voidaan esittää desimaalilukumuodossa. Opetuksen apuna toimii piirakkamalli, jossa pinta-alalla kuvataan murtolukua. Samassa yhteydessä opetetaan sekaluvun muuttaminen desimaaliluvuksi. Kuvassa 4 on näytettynä kirjan malli tästä muuttamisesta.



Kuva 4 3. Vuosiluokan kevätosuudessa esitetty desimaaliluku ja sen linkitys murtolukuun. (Laskutaito 3 kevätosa, 36)

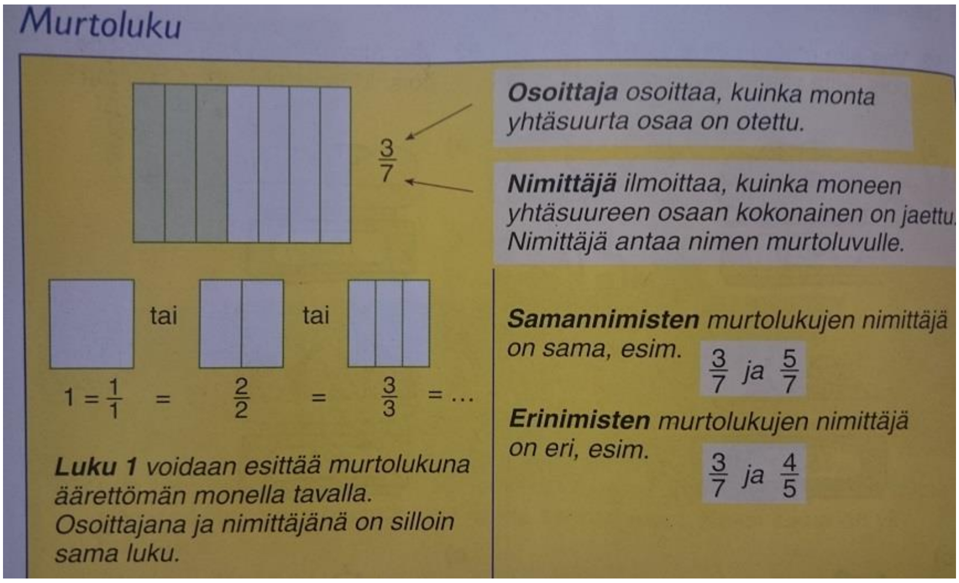
Kun murtoluku on yhdistetty lukusuoraan ja desimaalilukuun, seuraavaksi kirjassa yhdistetään desimaaliluvun malli lukusuoramalliin. Desimaaliluvut pysyvät yhä kymmenesosien tarkkuudessa ja tätä on havainnollistettu kirjassa sijoittamalla desimaaliluvut lukusuoralle.

Vuosiluokalla 4 syysosuudessa keskitytään lukualueen laajentamiseen eikä siinä käsitellä rationaalilukuja. Kevätosassa kerrataan murto-, seka- ja desimaaliluvut ja opetellaan niiden yhteen- ja vähennyslaskut sekä lukujen suuruuden vertailu. Murtolukua yhä havainnollistetaan pinta-alojen sekä määrien vertailulla. Mittaluvut, joista suurimmassa painoarvossa on pituus, opetellaan muuttamaan desimaalimuotoon.

4.1.3 5. – 6. Vuosiluokka

Viidennellä vuosiluokalla aloitetaan kokonaislukujen esittelyllä sivulla 6. Tämän jälkeen kerrataan kokonaislukujen kerto- ja jakolaskua sekä desimaalilukuun liittyvät yhteen- ja vähennyslaskut sekä pyöristys- ja pituudeksi muuttamiseen liittyvät säännöt. Tämän jälkeen kirjassa yhdistetään desimaali- ja murtoluku toisiinsa. Tässä yhteydessä desimaaliluku esitetään niin, että se saadaan jakolaskun avulla. Jakolaskussa murtoluvun osoittaja jaetaan nimittäjällä. Oppikirjan esittämä malli tästä on esitetty liitteenä kuvassa 3.

Myöhemmin loppuosassa kirjaa käsitellään murtolukuja. Murtoluvusta kerrataan osoittaja ja nimittäjä, mutta tuodaan uutena asiana esille murtolukujen saman- ja erinimisyydet. Tätä on havainnollistettu kuvassa 5.



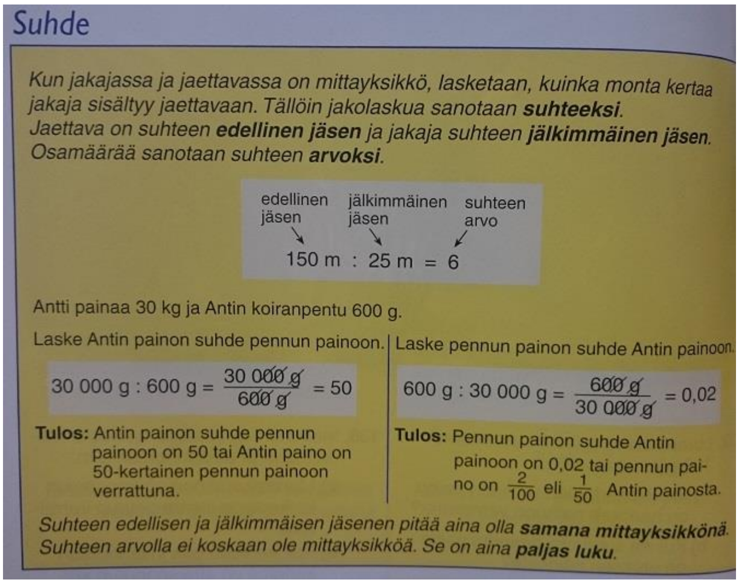
Kuva 5 5. Vuosiluokalla esitetty murtoluku. (Laskutaito 5, 124)

Tämän jälkeen on tuotu mukaan murtoluvun joukkomalli, jossa edellisten selitysten vallassa ollut pinta-alalla tehty murtoluvun havainnollistaminen on muutettu kappalelähtöiseksi. Loppuosa kirjasta harjoitellaan murtolukujen laskusääntöjä sekä supistamista ja laventamista. Murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys mainitaan uudelleen vastaavasti kuin sivulla 60, mutta nyt muuntaminen tehdään murtoluvusta desimaalilukuun.

Kuudennella vuosiluokalla kerrataan ensin desimaaliluvut ja niiden yhteen- ja vähennyslaskut. Tämän jälkeen opetellaan kertomaan ne luonnollisella luvulla ja desimaaliluvulla ja lopuksi jakamaan desimaaliluvulla.

Näiden jälkeen oppilaille opetetaan sekä moninkertaisuus ja kuinka suuri osa jokin on jostakin. Näissä oleellinen osa on murtolukumerkintä, jolla kahta asiaa vertaillaan ja saadaan kahden asian välinen suuruussuhde selville. Tätä on havainnollistettu liitteenä olevassa kuvassa 4.

Heti perään oppilaille opetetaan suhde. Tässä jakolaskua, jossa selvitetään, kuinka monta kertaa jokin mittayksikkö sisältyy toiseen mittayksikköön, kutsutaan suhteeksi. Tämän osamäärän lopputulosta sanotaan suhteen arvoksi. Tätä on havainnollistettu kuvassa 6.



Suhde

*Kun jakajassa ja jaettavassa on mittayksikkö, lasketaan, kuinka monta kertaa jakaja sisältyy jaettavaan. Tällöin jakolaskua sanotaan **suhteeksi**. Jaettava on suhteen **edellinen jäsen** ja jakaja suhteen **jälkimmäinen jäsen**. Osamäärää sanotaan suhteen **arvoksi**.*

edellinen jäsen, jälkimmäinen jäsen, suhteen arvo

150 m : 25 m = 6

Antti painaa 30 kg ja Antin koiranpentu 600 g.

Laske Antin painon suhde pennun painoon.

$30\,000 \text{ g} : 600 \text{ g} = \frac{30\,0\cancel{00}\,\cancel{g}}{6\cancel{00}\,\cancel{g}} = 50$

Tulos: Antin painon suhde pennun painoon on 50 tai Antin paino on 50-kertainen pennun painoon verrattuna.

Laske pennun painon suhde Antin painoon.

$600 \text{ g} : 30\,000 \text{ g} = \frac{6\cancel{00}\,\cancel{g}}{30\,0\cancel{00}\,\cancel{g}} = 0{,}02$

Tulos: Pennun painon suhde Antin painoon on 0,02 tai pennun paino on $\frac{2}{100}$ eli $\frac{1}{50}$ Antin painosta.

*Suhteen edellisen ja jälkimmäisen jäsenen pitää aina olla **samana mittayksikkönä**. Suhteen arvolla ei koskaan ole mittayksikköä. Se on aina **paljas luku**.*

Kuva 6 6. vuosiluokalla suhteen esittely. (Laskutaito 6, 54)

Suhteen opetuksen jälkeen siirrytään geometriaosuuteen, jossa ensin opetellaan yksinkertainen suurennoksen teko käsin. Tämän jälkeen tutustutaan mittakaavaan, jossa mittakaava on suhde. Tässä mittakaavalla käytetään vastaavaa merkintää kuin suhteelle, kaksoispistettä ”:”. Heti suurennoksen perään opetetaan pienennöksen tekeminen ja todellisen pituuden laskeminen mittakaavan avulla. Kirjan tapa esitellä mittakaava on esitetty liitteenä olevassa kuvassa 5.

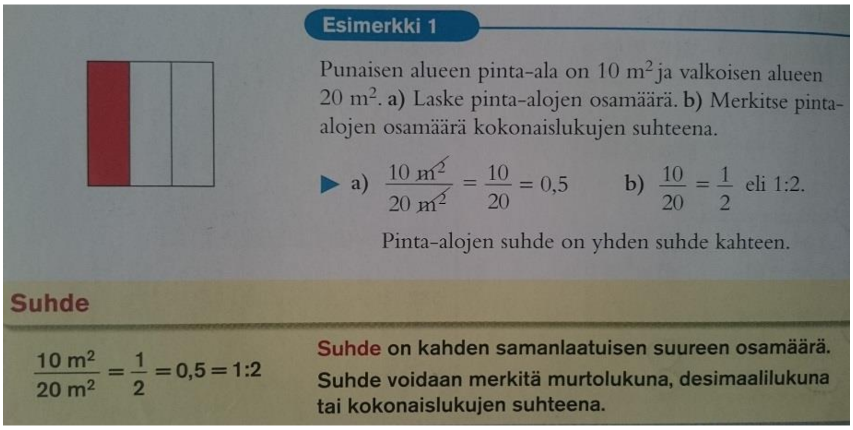
Murtolukujen laventamista ja supistamista kerrataan ja jatketaan kirjan loppupuolella. Lisäksi murtoluvun ja desimaaliluvun merkintöjen muuttamista toisikseen käsitellään kirjan loppuosassa.

4.1.4 7. – 8. Vuosiluokka

Seitsemännellä vuosiluokalla kerrataan murto- ja desimaaliluvut ja niiden yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut. Uusia rationaaliluvun eri representaatioiden välisiä yhteyksiä ei luoda edellisten rinnalle. Seitsemännellä vuosiluokalla kirjan sisällysluettelossa mainitaan termi rationaaliluvut, mutta sitä ei käytetä itse kirjassa.

Kahdeksas vuosiluokka aloitetaan opettelemalla muuntamaan desimaali- ja murtoluvut prosenteiksi. Tämän jälkeen käytetään murtolukumerkintää vertailemaan prosentuaalisia osuuksia. Kahdeksannella vuosiluokalla rationaaliluvut mainitaan muiden lukualueiden yhteydessä. Rationaaliluvut määritetään murtoluvuiksi ja ne yhdistetään päättyviin ja päättymättömiin jaksollisiin desimaalilukuihin. Liitteenä olevassa kuvassa 6 on esitettynä kirjan tapa jakaa lukualueet, jotka ovat itse asiassa lukujoukkoja.

Kahdeksannella vuosiluokalla jatketaan myös suhteen opettelua verrannon, suoraan- ja kääntäen verrannollisuuden takia. Suhde voidaan kirjan opetuksen mukaan merkitä murto- tai desimaalilukuna sekä kokonaislukujen suhteena. Kuvassa 7 on esitettynä kirjan esimerkki suhteen käytöstä.


Esimerkki 1

Punaisen alueen pinta-ala on 10 m^2 ja valkoisen alueen 20 m^2. **a)** Laske pinta-alojen osamäärä. **b)** Merkitse pinta-alojen osamäärä kokonaislukujen suhteena.

▶ a) $\frac{10\,\cancel{m^2}}{20\,\cancel{m^2}} = \frac{10}{20} = 0{,}5$ **b)** $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ eli 1:2.

Pinta-alojen suhde on yhden suhde kahteen.

Suhde

$\frac{10\ m^2}{20\ m^2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 1:2$

Suhde on kahden samanlaatuisen suureen osamäärä. Suhde voidaan merkitä murtolukuna, desimaalilukuna tai kokonaislukujen suhteena.

Kuva 7 8. vuosiluokan kirjasta esimerkki suhteen käytöstä ja suhteen merkitsemisestä murto- tai desimaalilukuna tai kokonaislukujen suhteena. (Laskutaito 8, 110)

Myöhemmin kirjassa opetellaan käyttämään mittakaavaa pienennöksiin ja suurennoksiin sekä yhdenmuotoisuuden osoittamiseen.

4.2 Aineiston analyysi

Tutkimuskysymyksiä varten aineistoa käsitellään niin, että sitä voidaan tulkita paremmin. Tutkimuslomakkeen tehtävien 1 ja 2 luokitellaan menetelmäosuudessa osoitetulla tavalla ja tehtäviin 3 ja 4 jaotellaan oikein vastanneiden suhteen. Kun tehtävät ovat analysoitu, pyritään niiden avulla luomaan taulukoita, joilla voidaan myöhemmin tutkia tutkimuskysymyksiä. Lopuksi tehdään kirjallisuuskatsaus ja pyritään yhdistämään sen tiedot aiempiin analyyseihin ja vastaamaan viimeiseen tutkimuskysymykseen.

Tehtävässä yksi selvitettiin, kuinka hyvin oppilaat keksivät, muistivat ja tunsivat rationaaliluvun eri esitysmuotoja, kun heille annettiin murtolukumerkintä $\frac{2}{3}$. Tehtävään vastasivat kaikki paitsi yksi oppilas, joten vastauksia saatiin yhteensä 68 kappaletta. Oppilailta tuli monipuolisesti erilaisia vastauksia.

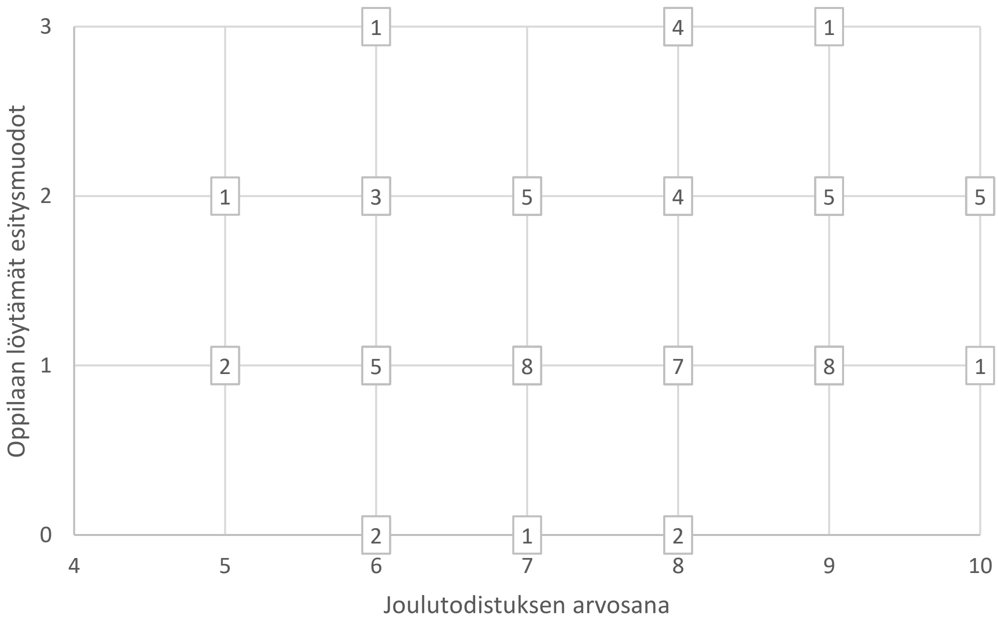
Seuraavassa taulukossa on jaoteltuna, kuinka moni oppilas löysi vastauksessaan tehtävään 1 tietyn rationaaliluvun esitysmuodon.

Taulukko 2 Tehtävälomakkeen 1 tehtävän vastauksista löytyneet rationaaliluvun eri esitysmuodot ja niiden prosenttiosuudet kaikista 68 vastaajista.

Esitysmuoto	**Osa kokonaisuudesta**	**Suhde**	**Osamäärä**	**Operaattori**	**Mitta**	**Mu u**
Vastauksia	54	6	23	12	4	22
Prosentti-osuus	79,4 %	8,8 %	33,8 %	17,6 %	5,9 %	32,4 %

Taulukkoon 3 on asetettu koordinaatistoon 1 tehtävässä löytyneet eri esitysmuodot ja yhdistetty ne oppilaan joulutodistuksessa olleeseen arvosanaan. Pystyakselilla muuttujana on oppilaan löytämät erilaiset rationaaliluvun esitysmuodot ja vaaka-akselilla joulutodistuksen arvosana. Arvopisteiksi asetettiin niiden oppilaiden lukumäärä, jotka olivat löytäneet yhtä monta erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa ja joilla on sama joulutodistuksen arvosana. Tästä voidaan havaita, että oppilaan joulutodistuksen arvosanan parantuessa hän löysi todennäköisemmin useampia erilaisia rationaaliluvun esitysmuotoja.

Taulukko 3 Oppilaiden löytämät erilaiset rationaaliluvun esitysmuodot edellisen joulutodistuksen matematiikan arvosanan funktiona. Arvopiste kertoo kuinka monta oppilasta sai saman määrään esitysmuotoja samalla arvosanalla.



Kuten tehtävässä 1, tehtävässä 2 selvitettiin oppilaiden rationaaliluvun esitysmuotojen tuntemista. Tässä tehtävässä eroten edellisessä annettiin murtolukuesityksen lisäksi desimaaliesitys (b-kohta), kaksi erilaista määrää kuvastavaa kuvaa (c- ja d-kohdat) ja lukusuoraesitys (e-kohta).

Seuraavassa taulukossa on esitettynä oppilaiden vastaukset tehtävän 2 jokaiseen alakohtaan. Taulukoissa kerrotaan, kuinka monelta oppilaalta tuli kyseiseen alakohtaan tietty rationaaliluvun esitysmuoto vastaukseksi ja kuinka suuri prosentuaalinen osuus se on kaikista kyseiseen alakohtaan tulleista vastauksista.

Taulukko 4 Tehtävälomakkeen tehtävän 2 alakohtien vastauksista löytyneet rationaaliluvun esitysmuodot ja niiden prosentuaalinen osuus kaikista vastauksista. Vastauksia yhteensä 65 oppilaalta.

Esitysmuoto	**Osa kokonai-suudesta**	**Suhde**	**Osamäärä**	**Ope-raattori**	**Mitta**	**Muu**
a) Vastauksia	36 (56,3 %)	1 (1,6 %)	11 (17,2 %)	7 (10,9 %)	0 (0 %)	19 (29,7 %)
b) Vastauksia	1 (1,9 %)	0 (0 %)	32 (60,4 %)	7 (13,2 %)	2 (3,8 %)	15 (28,3 %)
c) Vastauksia	30 (47,6 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (4,8 %)	4 (6,3 %)	30 (47,6 %)
d) Vastauksia	28 (46,7 %)	0 (0 %)	2 (3,3 %)	2 (3,3 %)	0 (0 %)	31 (51,7 %)
e) Vastauksia	1 (1,8 %)	0 (0 %)	16 (28,1 %)	2 (3,5 %)	35 (61,4 %)	6 (10,5 %)

Oppilaiden vastauksissa oli havaittavissa painotus osaan kokonaisuudesta ja osamäärän representaatioihin. Myös mitta osoittautui oppilaiden tuntemaksi varsinkin e-kohdassa. Operaattori tuli tasaisesti jokaisessa kohdassa esille, mutta suhde löydettiin koko tehtävässä vain kerran.

Tutkimuksen kannalta oli hyvä havaita, että kaikkia rationaaliluvun esitysmuotoja näkyi vastauksissa. Taulukossa 4 on esitettynä oppilaiden lukumäärä, jotka olivat löytäneet kyseisen rationaaliluvun esitysmuodon tehtävässä 1 tai 2 Lisäksi taulukkoon on kirjattu tieto, kuinka monta kertaa kyseinen esitysmuoto esiintyi tehtävissä 1 ja 2 keskimäärin oppilasta kohden.

Taulukko 5 Rationaaliluvun esitysmuotojen esiintyminen oppilaiden vastauksissa tehtävissä 1 ja 2.

	Osa kokonaisuudesta	**Suhde**	**Osamäärä**	**Operaattori**	**Mitta**
Oppilaat, jotka löysivät esitysmuodon	61 (88,4 %)	7 (10,1 %)	45 (65,2 %)	24 (34,8 %)	38 (55,1 %)

Osa kokonaisuudesta löytyi suurimman osan oppilaista vastauksista. Yli puolet oppilaista tunnistivat mitan ja osamäärän, mutta esitysmuodot operaattori ja suhde olivat vähemmän tunnetut.

On mielenkiintoista myös selvittää, onko tyttöjen ja poikien rationaalilukujen eri esitysmuotojen löytämisessä eroja. Taulukossa 5 on jaoteltuna, kuinka moni oppilas löysi tietyn verran erilaisia rationaaliluvun esitysmuotoja tehtävistä 1 ja 2. Jaottelu on tehty niin tyttöjen ja poikien välille kuin myös 7.- ja 8.-luokkalaisten välille. Sukupuoltaan ilmoittamattomat päätettiin jättää pois taulukosta heidän populaation koon pienuuden vuoksi.

Taulukko 6 Tyttöjen sekä poikien sekä 7. ja 8. vuosiluokkalaisten löytämien erilaisten rationaaliluvun esitysmuotojen määrä.

	7. luokkalaiset	**8. luokkalaiset**	**Tytöt**	**Pojat**
Oppilaita	36	33	36	26
Ei löytänyt esitysmuotoja	0	0	0	0
Löysi 1 esitysmuodon	4	4	4	4
Löysi 2 esitysmuotoa	18	9	14	9
Löysi 3 esitysmuotoa	12	10	9	10
Löysi 4 esitysmuotoa	2	10	9	3

Useampi kahdeksasluokkalainen löysi neljä erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa verrattuna seitsemäsluokkalaisiin. Toisaalta useampi seitsemäsluokkalainen löysi kaksi erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa verrattuna kahdeksasluokkalaisiin. Useampi tyttö löysi kaksi ja neljä rationaaliluvun esitysmuotoa verrattuna poikiin.

Teoriaosuudessa esitetyssä kirjallisuudessa on havaittu, että matematiikassa pärjäämisen ja rationaalilukujen esitysmuotojen hallitsemisen välillä on yhteys. Sen tutkimista varten koottiin taulukko 6, jossa oppilaat jaettiin joulutodistuksessa olleiden arvosanojen mukaisiin luokkiin. Näiden luokkien sisällä oppilaat jaettiin vielä tehtävissä 1 ja 2 oppilaan löytämien erilaisten rationaaliluvun esitysmuotojen määrän mukaan.

Taulukko 7 Oppilaiden lukumäärä, jotka löysivät tietyn verran esitysmuotoja tehtävissä 1 ja 2 luokiteltuna joulutodistuksessa olleen matematiikan arvosanan mukaan.

Joulutodistuksen arvosana	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Vastauksia	3	11	13	17	14	6
1 esitysmuoto	1	1	3	2	1	0
2 esitysmuotoa	0	4	8	6	3	4
3 esitysmuotoa	0	5	2	5	6	2
4 esitysmuotoa	2	1	1	4	4	0

Taulukon 6 perusteella on havaittavissa yhteys, että arvosanan parantuessa oppilaat löytävät useammin enemmän esitysmuotoja. Esimerkiksi arvosanan kuusi saaneista oppilaista enemmistö löysi 2 tai 3 esitysmuotoa, kun taas arvosanan yhdeksän saaneista oppilaista enemmistö löysi 3 tai 4 esitysmuotoa.

Tehtävälomakkeen 3 tehtävässä tutkittiin oppilaiden kykyä tehdä yksinkertainen suhdelasku ja laskea sen perusteella mehutiivisteen prosentuaalinen osuus valmiista mehusta. Tutkimuksen kannalta ovat oleellisia sekä suhteen avulla laskeminen, että prosenttiosuuden määritys, jolloin on tarpeellista selvittää molempien osaaminen. Mikäli siis oppilas ei ole osannut laskea mehun valmistusta oikein, mutta on osannut laskea valmistamansa mehun prosentuaalisen osuuden oikein, tulee sekin eritellä. Monella oppilaalla havaittiin olevan virheellinen käsitys suhteen laskemisesta siten, että yhteen osaan mehua tulee kaksi osaa vettä, jolloin tämä päätettiin erotella muista vääristä vastauksista. Näille jokaiselle alaluokalle laskettiin myös keskiarvo eri rationaaliluvun esitysmuotojen löytymisen määrästä.

Tämä jaottelu suhteen ja prosenttiosuuden laskemisen suhteen on tehty taulukossa 7. Vastausjoukosta kukaan, joka oli laskenut suhteen virheellisesti ja saanut veden määräksi muun kuin kaksi litraa ja valmiin mehun määräksi kolme litraa, ei osannut laskea prosenttiosuutta oikein antamilleen määrille. Tämän vuoksi taulukkoon ei lisätty heille prosenttiosuuden osanneiden kohtaa.

Taulukko 8 Tehtävälomakkeen tehtävän 3 vastaukset taulukoituna. Vastaukset luokiteltu mehun tekemisen osaamisen mukaan. Näistä on vielä eritelty edellisen vastauksen mukaisen mehun prosenttiosuuden laskemisen osaaminen.

	Mehulasku oikein (3 l vettä, 4 l mehua)		**Mehulasku väärin (2 l vettä, 3 l mehua)**		**Mehulasku väärin (muut)**
Vastausten määrä	32		19		13
	Prosenttilasku oikein	Prosenttilasku väärin	Prosenttilasku oikein	Prosenttilasku väärin	Prosenttilasku väärin
Vastausten määrä	25 (78,1 %)	7 (21,9 %)	13 (68,4 %)	6 (31,6 %)	13 (100,0 %)

Tehtävä osoitti, että testin tehneistä oppilaista 32 osasivat laskea suhdelaskun. Kuitenkin reilu puolet heistä, jotka eivät osanneet laskea suhdetta oikein, laskivat sen tietyllä tavalla väärin. Prosenttilaskut olivat pääsääntöisesti oppilailla hallussa.

Nyt kun oppilaat ovat jaoteltuna heidän suhde- ja prosenttilaskun osaamisen mukaan, voidaan tutkia, eroaako suhde- ja prosenttilaskun osaaminen oppilaiden rationaaliluvun eri muotojen tunnistaminen näiden ryhmien välillä. Tätä on kuvattu taulukossa 9.

Taulukko 9 Oppilaiden määrä, jotka löysivät tietyn verran erilaisia rationaaliluvun esitysmuotoja jaoteltuna sen mukaan, osasivatko he laskea suhteen tai prosenttilaskun.

	Osasi laskea suhteen	**Ei osannut laskea suhdetta**	**Osasi laskea prosenttilaskun**	**Ei osannut laskea prosenttilaskua**
Löysi 1 esitysmuodon	5	3	5	3
Löysi 2 esitysmuotoa	8	14	12	10
Löysi 3 esitysmuotoa	13	9	14	8
Löysi 4 esitysmuotoa	6	6	7	5

Taulukosta 9 havaitaan, että suhteen osanneista oppilaista suurin osa löysi 3 erilaista esitysmuotoa rationaaliluvulle, kun taas suhdelaskussa epäonnistuneista oppilaista suurin osa löysi kaksi erilaista esitysmuotoa. Toisaalta prosenttilaskussa sekä onnistuneista että epäonnistuneista suurin osa löysi kaksi tai kolme esitysmuotoa.

Viimeisessä tehtävälomakkeen tehtävässä selvitettiin oppilaiden kykyä vertailla kahden murtoluvun suuruutta. Kaikki oppilaat vastasivat tähän tehtävään, joten aineistoa on 69 vastausta. Tehtävän eri alakohtien oikeiden vastausten määrä ja prosenttiosuudet on esitetty taulukossa 10.

Taulukko 10 Tehtävälomakkeen tehtävän 4 alakohtien oikeiden vastausten lukumäärä ja prosenttiosuudet. Vastaajia oli 69 oppilasta.

Murtolukupari	$\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\ \frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}\ \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}\ \frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}\ \frac{1}{3}$	$\frac{6}{9}\ \frac{4}{8}$	$\frac{3}{3}\ \frac{7}{8}$
Oikeita vastauksia (Prosenttiosuus)	69 (100 %)	67 (97,1 %)	67 (97,1 %)	46 (66,7 %)	66 (95,7 %)	59 (85,5 %)	60 (87,0 %)	66 (95,7 %)

Oppilaiden matemaattinen osaaminen tehtävässä 4 on esitetty taulukossa 11. Taulukkoon on jaettu oppilaat oikeiden vastausten lukumäärän mukaan ja se kertoo, montako oppilasta sai saman määrän oikeita vastauksia ja heidän prosentuaalisen osuuden kaikista oppilaista. Tämän lisäksi kyseiset oppilaat on jaoteltuna heidän tehtävissä 1 ja 2 löytämien erilaisten rationaaliluvun representaatioiden määrän mukaan.

Taulukko 11 Oppilaiden lukumäärä, jotka löysivät tietyn verran erilaisia rationaaliluvun esitysmuotoja tehtävissä 1 ja 2 luokiteltuna tehtävässä 4 oikeiden vastausten määrän mukaan.

Oikeiden vastausten lukumäärä	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Vastauksia (prosenttiosuus)	2 2,9 %	2 2,9 %	12 17,4 %	14 20,3 %	39 56,5 %
Löysi 1 esitysmuodon	0	0	4	1	3
Löysi 2 esitysmuotoa	1	1	5	5	15
Löysi 3 esitysmuotoa	0	0	1	6	15
Löysi 4 esitysmuotoa	1	1	2	2	6

Taulukosta on havaittavissa, että oppilaat, jotka saivat kuusi oikein tehtävästä 4 löysivät pääosin vain yksi tai kaksi erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa. Oppilaat, jotka saivat tehtävästä 4 oikein 7 tai 8 kohtaa, löysivät todennäköisemmin kaksi tai kolme erilaista esitysmuotoa.

5 TULOKSET JA POHDINTA

Tässä luvussa tutkitaan ja pohditaan analyysin avulla saatuja tietoja ja pyritään niiden avulla vastaamaan tutkimuskysymyksiin. Tämä luku jaetaan neljään osaan, joissa jokaisessa tutkitaan yhden tutkimuskysymyksen aihetta ja pyritään vastaamaan tutkimuskysymykseen.

5.1 Mitä eri rationaaliluvun representaatioita oppilaat tuntevat?

Rationaalilukujen tuntemusta voidaan tutkia tehtävälomakkeen tehtävien 1 ja 2 avulla. Tässä tutkimuksessa rajattiin ja luokiteltiin rationaaliluvun representaatiot viiteen luokkaan.

Taulukkoon 2 kootuista tehtävään 1 tulleista vastauksista havaitaan, että esitysmuoto osa kokonaisuudesta on selkeästi oppilaille tutuin (54 vastausta). Lisäksi osamäärä (23 vastausta) ja operaattori (12 vastausta) löytyivät useasta vastauksesta. Vähiten tunnetut esitysmuodot olivat suhde (6 vastausta) vastausta ja mitta (4 vastausta). Oppilaat lisäksi keksivät jotain muita rationaaliluvun käyttötarkoituksia (22 vastausta), mutta ne eivät olleet luokiteltavissa tutkimukseen valittuihin esitysmuotoihin.

Tehtävälomakkeen tehtävä 2 osoittautui onnistuneeksi tavaksi saada oppilailta muitakin vastauksia kuin osa kokonaisuudesta taulukon 3 perusteella. Ensimmäisessä alakohdassa murtolukumerkinnästä löydettiin selkeästi eniten esitysmuotoa osa kokonaisuudesta (36 vastausta). Oppilaat löysivät jonkin verran myös osamäärää (11 vastausta) ja operaattori (7 vastausta) esitysmuotoja. Tästä kuviosta ei löydetty ollenkaan mittaa ja vain yksi oppilas löysi suhteen. Oppilaat hahmottavat tämän perusteella murtolukumerkinnän selkeästi eniten osaksi kokonaisuudesta, jakolaskuksi tai kertoimeksi.

Tehtävän 2 toisessa alakohdassa annettiin pyöristysmerkinnällä desimaaliluku, jonka tarkoitus oli saada muitakin vastauksia kuin esitysmuotoa osa kokonaisuudesta. Oppilaat tulkitsivat merkinnän tarkoittavan selkeästi eniten osamäärää tai sen lopputulosta (32 vastausta). Toiseksi eniten merkintä tulkittiin operaattoriksi (7 vastausta) ja muut esitysmuodot saivat korkeintaan muutaman prosentin vastauksista. Tulos ei yllätä, sillä usein jakolaskun lopputuloksena on desimaaliluku, jolloin se desimaaliluku on helpointa tulkita osamääräksi tai sen lopputulokseksi.

Kolmannessa ja neljännessä alakohdassa haettiin kahta erilaista pinta-alan avulla kuvattavaa rationaaliluvun esitysmuotoa. Pyrkimys oli saada suhde erotettua osasta kokonaisuutta, mutta tulokset osoittavat, että tässä ei onnistuttu halutulla tavalla. Molemmissa alakohdissa osa kokonaisuudesta sai selkeästi eniten vastauksia (30 ja 28 vastausta) ja muutaman vastauksen operaattoriksi (3 ja 2 vastausta). Alakohtaan c oli tulkittu muutaman kerran mitaksi (4 vastausta) ja alakohta d osamääräksi (2 vastausta). Kumpaankaan kohtaan ei vastattu kertaakaan suhdetta. Kuitenkin oppilailla oli laajasti muita esimerkkejä molemmissa kohdissa (20 ja 31 vastausta) joita ei voitu luokitella mihinkään esitysmuotoon yksiselitteisesti. Osan kokonaisuudesta suosio ei yllätä, sillä pinta-alojen ja kappaleiden määrien avulla opetetaan murtoluvut ja erityisesti osa kokonaisuudesta-esitysmuoto.

Viimeisessä alakohdassa oli graafisena esityksenä lukusuora, jolla haettiin esitysmuotoa mitta. Valinta oli onnistunut ja useat oppilaat vastasivat jonkin mittaukseen kuuluvan välineen. Mitta esitysmuoto oli suosituin (35 vastausta), mutta myös osamäärä löytyi useasta vastauksesta (16 vastausta). Operaattori (2 vastausta) ja osa kokonaisuudesta (1 vastausta) sai vain muutaman vastauksen suhteen saamatta yhtään. Lukusuoralle tulkinta ”mitta” on hyvin ymmärrettävä ja odotettavissa, sillä oppilaille on hyvin tuttuja erilaiset mitat, joissa asteikko muistuttaa lukusuoraa.

Taulukon 4 perusteella tehtävissä 1 ja 2 oppilaista 61 löysi esitysmuodon osan kokonaisuudesta. Seuraavaksi yleisimmin oppilaat löysivät osamäärän (45 vastausta), mitan (38 vastausta) ja operaattorin (24 vastausta). Suhde oli harvinaisin, sillä vain seitsemän oppilasta vastasi sen johonkin kohtaan. Nämä ovat linjassa muiden havaintojen kanssa, sillä osamäärää vastattiin eniten tehtäviin 1 sekä tehtävän 2 alakohtiin a, c ja d. Osamäärä oli toisiksi yleisin tehtävässä 1 ja yleisin tehtävän 2 alakohdassa b.

Tähän tutkimukseen valituista rationaaliluvun esitysmuodoista osa kokonaisuudesta, osamäärä sekä mitta ovat oppilaille tunnetuimmat. Rationaaliluku tulkitaan useimmin osaksi kokonaisuudesta, mikäli rationaalilukua kuvataan murtolukumerkinnän tai pinta-alan avulla. Tulkinta on todennäköisesti osamäärä, mikäli rationaalilukua kuvataan desimaaliluvun avulla. Mitaksi rationaaliluku tulkitaan useimmin silloin, kun sitä kuvataan lukusuoralla.

Tutkitaan seuraavaksi, onko tutkimuslomakkeen alussa olevien taustatietojen avulla mahdollista löytää yhteyksiä rationaaliluvun eri esitysmuotojen tunnistamiseen ja tietämiseen. Oppilaiden omaa arvioita murtolukujen vaikeudesta käsitteenä matematiikan opetuksessa päätettiin jättää pois, sillä oppilaat vastasivat pääosin vain vaihtoehtoja 2 ja 3, jolloin ero näiden välillä on pieni.

Taulukon 7 mukaan seitsemännellä luokalla olevat oppilaat löysivät pääosin kaksi tai kolme erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa, kun taas kahdeksasluokkalaiset löysivät lähes yhtä monesti kaksi, kolme tai neljä erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa. Eroa näiden välillä on jonkin verran, sillä vähemmän kahdeksasluokkalaisia löysi kaksi erilaista esitysmuotoa verrattuna seitsemäsluokkalaisiin. Toisaalta selkeästi useampi kahdeksasluokkalainen löysi neljä erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa. Tämä voi johtua siitä, että oppilaat ovat opiskelleet vuoden verran enemmän matematiikkaa. Oppilaiden käyttämän kirjasarjan tarkastelussa huomataan, että oppilaat käyvät lähes saman asiat lävitse molempina vuosina, joten heillä on samat tiedot ja kyvyt tehdä tehtävät. Syynä 8. luokkalaisten menestykseen voi olla myös vanhempi laskurutiini ja useamman toiston jälkeen erilaiset rationaalilukuun liittyvät ilmiöt ja termit ovat paremmin muistissa.

Kun vertaillaan tyttöjen löytämiä eri rationaaliluvun esitysmuotoja poikien löytämiin, havaitaan useamman tytön löytäneen neljä erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa poikiin verrattuna. Muuten sekä tytöt että pojat löysivät samoissa määrin eri määrän esitysmuotoja.

Voidaan siis tulkita, että kahdeksasluokkalaisilla on laajemmin hallussa erilaiset rationaaliluvun esitysmuodot kuin seitsemäsluokkalaisilla ja tyttöjen sekä poikien välillä ei ole suurta eroa eri esitysmuotojen hallitsemisessa.

5.2 Miten oppilaat tunnistavat suhde -käsitteen ja murtoluvun käsitteen annetuista kuvioista?

Toisen tutkimuskysymyksen tarkoituksena oli tutkia oppilaiden kykyä tunnistaa suhde käsitteenä annetuista kuvioista. Suhteen oletettiin olevan vaikea muistaa ja löytää esimerkeistä, sillä moni muu esitysmuoto on tutumpi ja esiintyy useammalla eri osa-alueella matematiikkaa.

Ensimmäisessä tehtävässä, missä oli pelkkä murtolukumerkintä, oppilaat löysivät yhteensä kuusi suhteen merkintää. Tämä on hyvin pieni osuus kaikista tutkimukseen osallistuneista oppilaista. Tällöin vain yksi oppilas mainitsi suhteen toisessa tehtävässä.

Mielenkiintoista oli havaita, että kuudesta suhteen löytäjästä yksi ei ollut löytänyt yleisintä esitysmuotoa, osaa kokonaisuudesta.

Toisessa tehtävässä annettiin rationaaliluvulle erilaisia numeerisia ja graafisia esitystapoja. Niillä pyrittiin saamaan selville ensimmäisen tutkimuskysymyksen lisäksi oppilaiden kykeneväisyys erottaa murtoluku ja suhde toisistaan. Tutkijan oma ajatus oli, että alakohdat c ja d nostattaisi ajatuksia murtoluvusta ja suhteesta. Kuitenkin osoittautui, että kukaan oppilas ei vastannut kumpaankaan alakohdista suhdetta. Tehtävälomakkeen tehtävään 2 vastattiin kerran suhde alakohtaan a, muihin ei vastattu suhdetta kertaakaan. Tämä oppilas, joka vastasi suhteen tehtävässä 2, ei kuitenkaan ollut vastannut sitä yhtenäkään vaihtoehtona tehtävässä 1. Oppilailla oli mahdollisuus nähdä termi “suhde” tehtävässä kolme, missä se mainitaan nimeltä. Tämä oli samalla puolella paperia kuin tehtävä 2, jolloin olisi voinut olettaa usean oppilaan älynneen käyttää sitä tehtävässä 2. Voi olla, että oppilaat eivät osanneet yhdistää kaksoispisteellä esitettyä suhdetta annettuihin merkintöihin tehtävässä 2.

Tehtävälomakkeen tehtävässä 3 laskettiin annetun suhteen avulla tarvittavan veden määrä, kun mehutiivistettä oli käytössä litra. Tehtävä laitettiin tutkimukseen siksi, että oli entuudestaan tiedossa suhteen laskemisen olevan vaikea hahmottaa, ja siinä tulee usein samanlainen ajatusvirhe. Kun mehutiivisteen suhde tarvittavaan veteen on 1:3 ja mehutiivistettä on käytettävissä litra, moni oppilas erehtyy ajattelemaan vettä tarvittavan kaksi litraa kolmen litran sijasta. Tämän vuoksi tehtävässä eroteltiin väärin lasketuista vastauksista juuri tämä ennalta odotettu väärin laskettu tapa. Tämä virheellinen ajatustapa on seuraus oppilaan tavasta hahmottaa suhde additiivisena funktiona multiplikatiivisen sijaan (Ben-Chaim ym. 2012, 28–29). Tällä tarkoitetaan sitä, että 1:3 nähdään niin, että mehutiiviste on yksi osa kolmesta kokonaisesta osasta. Tällöin kun yksi litra on mehutiivistettä, tarvitaan kaksi litraa vettä, jolloin 1 l + 2 l = 3 l.

Taulukkoon 7 on koottu tehtävän kolme vastaukset jaoteltuna edellisen kappaleen osoittamalla tavalla. Havaitaan, että suhteen oikein vastanneita oli 32, jolloin suurin osa tehtävään vastanneista osasi laskea suhteen oikein. Ennalta odotetun virheellistä ajattelutapaa edustavien vastausten määrä oli kuitenkin 19, joka on yli puolet väärin vastatuista vastauksista (32). Muita, jotka olivat laskeneet eri tavalla väärin, oli 13. Tästä voidaan päätellä, että vaikka suurin osa osasikin laskea suhteen avulla oikein, oli huomattava osa ajatellut suhteen virheellisesti.

Yhdistäen tehtävistä 1, 2 ja 3 saatavat tiedot voidaan tulkita, että oppilaiden kyky tunnistaa suhde murtolukumerkinnästä on parempi kuin esimerkiksi pinta-alojen, desimaaliluvun ja lukusuoran avulla. Tämä on ymmärrettävä havainto, sillä suhdetta käsitellään paljon juuri murtolukumerkinnän avulla kaksoispistemerkinnän ohella (Ben-Chaim ym. 2012, 24–25). Lisäksi vain noin puolet oppilaista osasivat laskea suhteen avulla oikein arkielämästä tutun mehutiivisteen tekemiseen tarvittavan mitan vettä. Suhteen käsite ei ole tutkimukseen osallistuneilla oppilailla hyvin hallussa.

5.3 Minkälainen yhteys on matematiikan opinnoissa menestymisen ja eri representaatioiden tuntemisen välillä?

On luonnollista ajatella, että menestyminen matematiikan opinnoissa olisi yhteydessä rationaaliluvun eri esitysmuotojen tuntemiseen. Tässä tutkimuksessa oppilaat tekivät kaksi tehtävää, joissa vaadittiin laskutaitoa. Näiden tehtävien sekä esitietona kysytyn joulutodistuksen matematiikan arvosanan perusteella pyritään löytämään yhteys tehtävissä 1 ja 2 löydettyjen eri rationaaliluvun esitysmuotojen määrään.

Ensimmäisenä tutkitaan, onko tehtävässä 1 löydettyjen erilaisten rationaaliluvun esitysmuotojen ja joulutodistuksessa olleen arvosanan välillä yhteyttä. Taulukossa 3 on esitetty erilaisten löydettyjen esitysmuotojen määrä joulutodistuksen arvosanan funktiona. Arvopisteinä on käytetty oppilaiden määrää, joille tulee sama arvo. Taulukosta havaitaan, että paremman matematiikan numeron joulutodistukseen saaneet olivat löytäneet enemmän erilaisia esitysmuotoja kuin huonomman arvosanan saaneet. Tämä voidaan havaita siitä, että kunkin arvosanan kohdalla niiden oppilaiden määrä, jotka ovat löytäneet kaksi tai enemmän esitysmuotoja, kasvaa suhteessa niiden oppilaiden määrään, jotka ovat löytäneet nolla tai yksi esitysmuotoa.

Edellisen tarkastelun lisäksi tutkitaan, onko joulutodistuksessa olleen matematiikan arvosanan ja tehtävissä 1 ja 2 löydettyjen erilaisten esitysmuotojen määrä yhteydessä toisiinsa. Taulukosta 6 nähdään, että arvosanan 5 saaneista oppilaista useimmat löysivät yhden tai neljä erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa, arvosanan 6 saaneista oppilaista kaksi tai kolme erilaista esitysmuotoa ja arvosanan 7 saaneista useimmat löysivät kaksi esitysmuotoa. Tämän jälkeen arvosanan parantuessa löydettyjen esitysmuotojen määrä kasvaa niin, että arvosanan 8 saaneista useimmat löysivät kaksi, kolme tai neljä ja arvosanan 9 saaneista useimmat löysivät kaksi, kolme tai neljä erilaista esitysmuotoa. Arvosanan 10 saaneista oppilaista useimmat löysivät kaksi erilaista esitysmuotoa. Arvosanojen 5 ja 10 kohdalla oppilaiden määrä on pieni suhteessa muihin arvosanajoukkoihin, jolloin ne ovat aliedustettuja muihin arvosanajoukkoihin nähden. Kuitenkin arvosanojen 6 ja 9 välillä on havaittavissa, että useammat oppilaat löysivät neljä erilaista esitysmuotoa. Kuten edellisessä tarkastelussa, tämäkin on ymmärrettävä seuraus.

Rationaaliluvun eri esitysmuotojen tunnistamista pyrittiin ennakoimaan myös tehtävässä 3 mitattujen suhde- ja prosenttilaskutaitojen mukaan. Taulukon 9 perusteella voidaan nähdä, että suhdelaskussa menestyneet oppilaat löysivät useimmin kolme erilaista esitysmuotoa, kun taas laskussa epäonnistuneista suurin osa löysi vain kaksi esitysmuotoa. Prosenttilaskuissa menestymisellä ei taulukon 9 perusteella ole havaittavaa eroa rationaaliluvun eri esitysmuotojen tuntemisen suhteen.

Oppilaiden löytämien rationaaliluvun eri esitysmuotojen määrän yhteyttä laskutehtävässä menestymiseen voidaan tutkia taulukon 11 avulla. Neljä tai viisi oikein saaneiden oppilaiden määrä on kaksi, joka on hyvin vähän suhteessa muihin luokkiin, joissa kussakin oli yli 10 oppilasta. Tällöin ne ovat aliedustettuna 6, 7 ja 8 oikein saaneisiin ryhmiin nähden. Taulukosta 11 havaitaan, että useimmat oppilaista, jotka saivat 6 oikein tehtävässä 4 löysivät yhden tai kaksi erilaista rationaaliluvun esitysmuotoa, kun taas 7 tai 8 oikein saaneista useimmat löysivät kaksi tai kolme erilaista esitysmuotoa. Enemmän oikeita vastauksia saaneet löysivät siis useimmiten enemmän erilaisia rationaaliluvun esitysmuotoja. Tämän perusteella murtolukujen suuruusvertailun osaamisella on yhteys rationaaliluvun erilaisten esitysmuotojen tuntemiseen.

Tässä tutkimuksessa havaittiin matematiikassa menestymisellä ja erilaisten rationaaliluvun esitysmuotojen tuntemisen välillä olevan pieni yhteys. Todistuksessa olevalla matematiikan numerolla sekä murtolukujen suuruusvertailussa menestymisellä nähtiin olevan positiivinen yhteys eri esitysmuotojen tuntemiseen, kuten myös suhdelaskussa menestymisellä. Kuitenkin prosenttilaskuissa menestymisellä ei ollut vaikutusta erilaisten esitysmuotojen tuntemiseen.

5.4 Miten oppilaiden aiemmassa kurssikirjallisuudessa otetaan kantaa rationaaliluvun eri representaatioihin ja niiden välisiin yhteyksiin?

Neljänteen eli viimeiseen tutkimuskysymykseen lähdetään hakemaan vastausta Laskutaito-kirjasarjan matematiikan oppikirjoista vuosiluokille 1.–8. Kirjoista etsitään, missä vaiheessa opintoja mitäkin eri esitysmuotoa käydään lävitse ja rinnastetaanko niitä toisiinsa.

Ensimmäisenä representaatiota oppilaille esitetään mitta, joka tulee mittaamisen muodossa ensimmäisellä vuosiluokalla. Mittaamista jatketaan toisella vuosiluokalla, jolloin se yhdistetään lukusuoraan. Lukusuoran käsite mainitaan myös silloin. Myöhemmin toisella vuosiluokalla mittaamiseen yhdistetään yksiköt, joista ensimmäisenä tulee raha (euro). Tässä yhteydessä oppilaille opetetaan myös desimaalimerkintä puhumatta siitä desimaalina.

Kolmannella vuosiluokalla oppilaat oppivat syysosassa jakolaskun, jolle käytetään sekä kaksoispiste- että murtolukumerkintää kuvan 2 mukaisesti. Jakolaskulle annetaan myös myöhemmin samalla vuosiluokalla nimitys osamäärä (kuva 3). Tässä vaiheessa jakolasku on aina määrän jakamista osiin. Kevätosassa oppilaille opetetaan murtoluku, joka esitetään pinta-alan avulla. Murtoluku opetetaan tarkoittamaan osaa kokonaisuudesta, jolloin pinta-alamerkintä on hyvin havainnollinen. Pinta-alamerkintää käytetään muun muassa kuvassa 4.

Ensimmäinen rationaaliluvun eri representaatioiden välinen yhdistäminen tapahtuu kolmannen vuosiluokan kevätosuudessa, jossa murto- ja sekaluvut laitetaan lukusuoralle (kuva 5). Heti tämän jälkeen opetetaan murtoluvun esittäminen desimaalilukumuodossa (kuva 6). Desimaaliluvulle annetaan merkitykseksi kertoa, kuinka monta kokonaista ja kuinka monta kymmenesosaa murtoluku on. Seuraavalla aukeamalla yhdistetään vielä desimaaliluku lukusuoralle. Kolmannella vuosiluokalla siis rinnastetaan murto- ja desimaaliluvut lukusuoraan, jolloin osa kokonaisuudesta, osamäärä ja mitta on yhdistetty toisiinsa. Kolmannella vuosiluokalla opetettiin tässä kirjassa paljon rationaaliluvun eri esitysmuotoihin liittyviä asioita.

Seuraavan kerran eri esitysmuotojen välisiä yhteyksiä käsitellään viidennellä vuosiluokalla, kun oppikirja käsittelee desimaali- ja murtoluvun yhteyttä. Kirjassa kerrotaan "Murtoluku voidaan muuntaa desimaaliluvuksi jakamalla osoittaja nimittäjällä joko jakokulmassa tai päässälaskien" (kuva 7). Oppikirja siis näkee desimaaliluvun niin, että se on murtoluvulle tehtävä jakolasku. Lisäksi kirjassa käsitellään se murtolukuihin liittyvä ominaisuus, että sama rationaaliluku voidaan esittää äärettömän monella tavalla (kuva 8). Myöhemmin myös kirjassa opetellaan kertomaan murtoluvulla, jolloin rationaaliluvun toimiminen operaattorina tulee opetuksen ohessa. Murtoluvulle esitetään ensimmäistä kertaa joukkomalli, jossa murtoluvulla käsitellään tiettyjen kuvioiden lukumäärän osuutta kaikkien kuvioiden lukumäärästä. Tämä on ensimmäinen kohta, jossa suhde tulee esille kirjasarjassa. Lisäksi se ilmoitetaan tässä yhteydessä murtolukumerkinnän avulla, jolloin murtolukumerkintä rinnastetaan osuuteen. Loppuosassa kirjaa vielä rinnastetaan uudelleen murto- ja desimaaliluvut toisiinsa.

Kuudennella vuosiluokalla tulee toinen suhteeseen liittyvä alustus, kun kahden mitattavissa olevan suureen moninkertaisuutta toisiinsa nähden lasketaan murtolukumerkinnän avulla (kuva 9). Heti seuraavalla aukeamalla käsitellään suhdetta, jossa suhde esitetään jakolaskuksi (kuva 10). Tämä jakolasku kertoo, kuinka monta kertaa jakaja sisältyy jaettavaan. Tällöin tämän laskun osamäärää kutsutaan suhteen arvoksi. Suhteelle käytetään kaksoispistemerkintää, joka lasketaan jakolaskuna käyttäen murtolukumerkintää. Tässä siis osa kokonaisesta, osamäärä sekä suhde yhdistetään toisiinsa rivien välissä. Hieman myöhemmin oppikirjassa käsitellään suurentamista mittakaavan avulla, jossa yhdistyy suhteen ja mitan käsitteet (kuva 11). Kuitenkaan tässä kohtaa ei mainita suhdetta terminä.

Prosenttiluvun käsittelyn yhteydessä kahdeksannella vuosiluokalla yhdistetään prosentti-, murto- ja desimaaliluku toisiinsa. Desimaaliluvun muuttamiseksi murtoluvuksi tulee ajatella, paljonko kymmenes- ja sadasosina desimaaliluku on. Murtoluku nähdään yhä vahvasti kuvaavan osaa kokonaisuudesta. Toisaalta murtoluvun muuttamiseen desimaaliluvuksi kannustetaan kirjan mukaan tekemään jakolasku, jolloin desimaaliluku on jakolaskun lopputulos eli osamäärä -esitysmuoto. Oppikirjassa (kuva 12) esitellään pian lukualueet luonnollisista luvuista reaalilukuihin, ja rationaaliluvuille annetaan seuraava määritelmä:

> “Rationaaliluvut eli murtoluvut: Q = {kaikki kokonaisluvut ja murtoluvut} = {kaikki päättyvät ja päättymättömät jaksolliset desimaaliluvut}.”

Rationaaliluvut määritellään oppikirjan mukaan siis murto- ja desimaalilukujen avulla. Tällöin näiden kahden rationaaliluvun merkintätavan välinen yhteys korostuu yhä enemmän opetuksessa.

Viimeisenä rationaaliluvun eri esitysmuotojen yhteyksiä käsitellään kirjan loppupuolella, jossa suhde määritellään kahden samanlaatuisen suhteen osamääräksi (kuva 13). Lisäksi kirjan mukaan suhde voidaan merkitä murtolukuna, desimaalilukuna tai kokonaislukujen suhteena.

Kirjasarjan tekijät ovat selkeästi mieltäneet tietyt rationaaliluvun esitysmuodot tietyille merkintätavoille. Murtolukumerkinnällä on kolmannesta luokasta lähtien pääosin käytetty ajatusta kuvaamaan osaa kokonaisuudesta, useimmiten pinta-alan tai määrän avulla. Nämä ovat hyvin ymmärrettävä valinta, sillä ne ovat konkreettisia arkimaailman esimerkkejä, jolloin murtolukumerkintä on helppo hahmottaa ja käsitellä. Murtolukua käytetään myös kuvaamaan operaattoria usein murtoluvulla kertomisen yhteydessä, mutta sen operaattorina toimimiseen ei erikseen kiinnitetä huomiota tässä yhteydessä. Osamäärälle jakolaskun merkityksessä kuvataan kaksoispisteellä tai murtolukumerkinnällä, mutta osamäärälle jakolaskun lopputuloksena käytetään desimaalimerkintää. Mitalle kirjassa käytetään eniten merkintätapaa lukusuora ja pituus. Suhdetta merkitään sekä murtoluku- ja kaksoispistemerkinnällä, ja suhteen arvona käytetään desimaalimerkintää. Oppilaan on siis erotettava, milloin merkinnällä tarkoitetaan suhdetta ja milloin osaa kokonaisuudesta tai osamäärää.

Rationaaliluvun eri esitysmuotojen välisiä yhteyksiä käsitellään kolmannesta luokasta alkaen. Monella vuosikurssilla käydään erityisesti läpi osan kokonaisuudesta ja osamäärän välistä yhteyttä murto- ja desimaalilukujen muuttamisessa toisiinsa ja niiden välisen yhteyden käsittelyssä. Nämä kaksi merkintää ovat hyvin yleisiä matematiikassa ja niille on annettu suuri painoarvo. Näiden kahden esitysmuodon välistä yhteyttä käydään joka vuosi lävitse aina kolmannesta vuosiluokasta kahdeksanteen vuosiluokkaan asti jollain käsittelytarkkuudella. Alakoulun puolella osaan kokonaisuudesta ja osamäärään yhdistetään myös mitta, sillä murto- ja desimaalilukujen opetusta yhdistetään mittayksiköiden opetukseen. Tämän jälkeen mitta jätetään pois hetkeksi, kunnes siihen palataan suhteen ja erityisesti mittakaavan yhteydessä. Operaattoria ei käsitellä kirjasarjassa muihin rationaaliluvun esitysmuotoihin rinnastettuna. Suhdetta käsitellään ensimmäisenä osuutena ja sitä käsitellään kahden mitan välisenä suhteena. Tällöin se saavutetaan osamäärän avulla, ja suhteen arvo on osamäärän arvo. Suhdetta merkitään osamäärän merkinnällä ja lasketaan käyttäen joko murtoluku- tai jakolaskumerkintää, jolloin se rinnastetaan myös osaan kokonaisuudesta ja osamäärään. Kuitenkin yhteys mainitaan vain muutaman kerran, jolloin sille annetaan huomattavasti pienempi painoarvo kuin esitysmuotojen osa kokonaisuudesta ja osamäärä. Suhde toisaalta käydään lävitse kunnolla vasta kuudennella luokalla, jolloin se ehtii olla vähemmän aikaa kirjassa verrattuna jakolaskun ja mitan avulla käsiteltäviin esitysmuotoihin.

Kokonaisuutena operaattoria lukuun ottamatta kaikki esitysmuodot rinnastetaan toisiinsa, mutta osamäärän ja osan kokonaisuudesta yhteyttä toisiinsa korostetaan huomattavasti enemmän kuin niiden yhteyksiä mittaan tai suhteeseen. Toisaalta mitta ja suhde rinnastetaan toisiinsa geometrian puolella hyvin tiiviisti.

5.5 Luotettavuus ja eettisyys

Tässä alaluvussa tarkastellaan aineistonkeruuseen käytetyn menetelmän luotettavuutta ja tutkimukseen liittyviä eettisiä kysymyksiä. Tähän lukeutuu niin tutkimuskysymyksiin vastaamiseen kuin sen analysointiin valitut menetelmät sekä tutkimuksessa käytettyjen menetelmien kritiikki. Tutkimustulosten luotettavuutta käsitellään tutkimustulosten yhteydessä myöhemmin.

Tutkittavien oppilaiden tietosuoja ja ihmisoikeudet on otettu työssä huomioon monella tavalla. Sarasjärven ja Tuomen (2018, 201) ovat luetelleet tutkittavien oikeuksiin kuuluvia asioita, joita tässä tutkimuksessa on noudatettu. Tutkimuslupaa hakiessa apulaisrehtori ilmoitti oppilaiden huoltajille tutkimuksen tekemisestä ja sen anonymiteetistä. Lisäksi siinä mainittiin, millainen tutkimustilanne on ja mitä oppilailta siinä vaaditaan. Tutkittaville tehtiin selväksi tutkimuksen aluksi, että tutkimusaineisto pysyy tutkijalla, kaikilla on anonymiteetti ja kysytyt taustatiedot tulee käyttöön vain vastausten luokitteluun. Oppilaille myös tehtiin selväksi, ettei tutkimukseen ole pakko osallistua. Myös se, mihin tutkimustietoa kerättiin, tehtiin oppilaille selväksi.

Tutkimukseen osallistui 69 oppilasta, jotka olivat 7.- ja 8. vuosiluokilla. Heidän avullaan oli tarkoitus tutkia yleisesti yläkoululaisen rationaaliluvun esitysmuotojen hallintaa.

Koulu valikoitui tutkijan itse käymään yläkouluun, mutta yläkoulu voidaan olettaa pienenä Kanta-Hämeen yläkouluna olevan yleistettävissä kuvaamaan Suomen yläkoulun keskimääräistä yläkoulua.

Sarasjärven & Tuomen (2018, 222) mukaan tutkijan tulee esittää omat sitoumuksensa tutkimukseen. Tutkijana mielestäni on tärkeää selvittää, kuinka hyvin eri rationaaliluvun esitysmuodot ovat oppilailla hallussa. Aluksi oletin, että oppilaat löytävät hyvin kaikki muut esitysmuodot paitsi suhteen. Kuitenkin myös operaattori osoittautui tuntemattomammaksi oppilaille kuin oletin.

Aineiston keruuseen valittu menetelmä oli hyvä, sillä valmista aineistoa ei ollut ja lyhyt tutkimuslomake oli helppoa liittää oppilaiden normaaliin oppituntiin. Kuitenkin tehtävälomake osoittautui kehityskelpoiseksi, sillä osassa tehtäviä en saanut oppilailta sellaisia vastauksia, mitä oletin niistä saavan. Lisäksi yhdellä oppitunnilla oli sijainen ja poistuttuani luokasta toiseen luokkaan huomasin palatessani, että luokassa oli alettu keskustelemaan ja ilmapiiri oli hieman levoton. Kuitenkin läsnäoloni sai tilanteen rauhoittumaan ja levottomimmat palauttivat valmiin tutkimuslomakkeen ja jatkoivat itsenäistä työskentelyä. Muilla oppitunneilla oppilaat malttoivat tehdä tehtävälomakkeen rauhassa loppuun. Tutkimus oli aikataulutettu kestämään arviolta puoli tuntia, mutta suunnilleen puolet oppilaista olivat valmiita jo noin vartin kuluttua. Tutkimuslomakkeen täyttäneet oppilaat tekivät jokaisessa luokassa itsenäisesti ja rauhallisesti töitä, jolloin lopuilla oli aikaa koko 45 minuuttia tehdä tutkimusta. Muutama käytti koko ajan. Vaikka tutkimuksen aineiston keruussa oli hieman ongelmia, uskon kaikkien oppilaiden vastanneen laadukkaasti tutkimuslomakkeeseen.

Tutkimukseen valitut menetelmät ovat tutkimuksen luotettavuuden kannalta kriittisin osuus. Työssä käytetty oppilaiden sanallisten vastausten kategorisointi tiettyihin tyyppeihin on tehty tutkijan käsityksen mukaisesti. Sarasjärven ja Tuomen (2018, 204) mukaan juuri laadullisen tutkimuksen luotettavuudessa tärkeitä kritiikin totuuteen ja objektiivisuuteen. Tutkija määrittelee teorian ja oman tietopohjansa perusteella vastauksia, jolloin tutkijan oma subjektiivisuus on luotettavuudelle vaarallista. Tämä havaintojen teoriapitoisuuden (Sarasjärvi & Tuomi 2018, 4) käyttö on otettu huomioon tutkijan pyrkiessä objektiivisuuteen oppilaiden vastausten luokittelussa.

Laadullisella analyysilla saatiin tutkimusaineistoa määrälliseen muotoon. Määrällisen analyysiin tarvitaan usein iso, hyvin valikoitu joukko vastaajia. Tässä tutkimuksessa kuitenkin rajoituttiin yhteen yläkouluun ja siitä kahteen yläkoululuokkaan. Aineisto on hyvin pieni ja yksipuolinen edustamaan kaikkia suomen yläkoululaisia. Tutkimuksen analyysissa näitä tuloksia käsitelläänkin siksi suuntaa-antavina niiden luotettavuuden rajallisuuden takia.

Tutkimuksen luotettavuuden arvioimiseen käytetään usein termejä reliabiliteetti ja validiteetti (Sarasjärvi & Tuomi, 2018, 206). Sarasjärven ja Tuomen mukaan nämä käsitteet ovat kuitenkin usein hyvin kritisoituja käsitteitä laadullisen aineiston tulkitsemiseen, sillä ne ovat vastaavat pääosin määrällisen tutkimuksen tarpeisiin. Koen tässä tutkimuksessa näiden käsitteiden käytön tarpeelliseksi, sillä tutkimusaineistoa käsitellään myös määrällisin menetelmin.

Tutkimuksen reliabiliteetilla tarkoitetaan mittaustuloksen toistettavuutta (Ketokivi 2015, 17). Kun tutkimuksella pyritään antamaan tietoa koko suomen yläkoulun oppilaiden rationaaliluvun esitysmuotojen osaamisesta, on aineisto liian suppea ja homogeeninen niin suuriin tulkintoihin. Toisaalta oppilaat olivat tavallisesta yläkoulusta Etelä-Suomesta, jolloin he voivat edustaa suuntaa-antavasti Suomen yläkoulujen oppilaita.

Tutkimusaineistoa suunniteltaessa pyrittiin luomaan oppilaille lomake, jossa olisi mahdollista saada esille oppilaiden kykyä tunnistaa ja tietää rationaaliluvun eri esitysmuotoja. Nämä kyseiset esitysmuodot olivat valittu jo etukäteen ja tutkimuslomakkeelle valittiin juuri sellaisia kuvia ja merkintöjä, jotka tutkijan mielestä havainnollistavat etsittyjä esitysmuotoja. Tällöin materiaalin validiteetti eli aineiston kyky mitata juuri sitä asiaa, mitä halutaan mitata, on hyvä (Ketokivi 2015, 24). Tutkimukseen valitut analyysimenetelmät valittiin juuri siten, että oppilaiden eri rationaaliluvun esitysmuotojen tietämys saataisiin parhaiten esille. Tutkimuksen voidaan päätellä mittaavan juuri sitä, mitä se pyrkii mittaamaan.

Kokonaisuutena itse tutkimus on laajuudessaan luotettava, sillä se pyrkii pienen ryhmän avulla saamaan suuntaa-antavia tuloksia isommasta ikäluokasta. Menetelmät ovat perusteltuja vastaamaan haluttuihin tutkimuskysymyksiin ja tutkimus noudattaa tieteellisen tutkimuksen etenemisjärjestystä.

6 JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA

Yläkoululaisten rationaaliluvun eri esitysmuotojen hallinta oli odotusten mukaisesti jakautunut. Oppikirjojen painottamat osa kokonaisuudesta sekä osamäärä olivat oppilaiden vastauksissa selkeästi muita esitysmuotoja yleisemmät. Yllättävän moni oppilas kuitenkin löysi mitan käsitteen, ottaen huomioon sen pienemmän painoarvon oppikirjallisuudessa. Suhteen käsite oli odotetusti vähiten tunnettu ja löydetty esitysmuoto tutkimuslomakkeen kysymyksien vastauksissa. Tehtävien määrä ja tutkimukseen osallistuvien oppilaiden määrä olivat kuitenkin pieniä, jolloin tutkimuksen tulokset ovat enemminkin suuntaa-antavia kuin tarkkoja tutkittuja faktoja. Lisäksi tutkimuksen loppusuoralla havaitsin, että tehtävässä 2 olisi voinut käyttää erilaista kuvaa suhteelle, jolla olisi voinut saada oppilailta enemmän suhteeseen liittyviä vastauksia. Myös esitysmuotoa ”operaattori” olisi voitu havainnollistaa konkreettisella merkinnällä abstraktien kuvioiden sijaan.

Suhteen avulla laskemisen odotettiin olevan oppilaille haastava, ja tutkimuksen mukaan vain puolet osasivat laskea helpon mehun valmistamiseen liittyvän laskun. Puolet väärin vastanneista olivat vastanneet odotetulla tavalla väärin, jossa suhdemerkintä tulkittiin osaksi kokonaisuutta. Kuusi oppilasta, jotka löysivät myös suhteen merkinnän tutkimuslomakkeen ensimmäiseen tehtävään, olivat erottaneet sen osasta kokonaisuudesta. Näin pienellä otannalla tutkimuksen perusteella on vaikea tehdä johtopäätöksiä suhteen ja murtolukumerkinnällä esitetyn osan kokonaisuudesta välillä, mutta laskutehtävän perusteella merkittävä määrä oppilaita sekoittaa suhteen osaksi kokonaisuudesta.

Matematiikassa pärjäämisen uskottiin olevan yhteydessä eri rationaaliluvun eri esitysmuotojen löytämiseen, ja tutkimuksessa löydettiinkin näiden välille pieni yhteys. Oppilaita osallistui tutkimukseen verrattain pieni määrä. Oppilaiden matematiikan arvosanat painottivat arvosanoja 7–9, jolloin vain muutama oppilas oli arvosanaluokissa 5–6 ja 10 ja siten molemmat ääripäät olivat aliedustettuja. Tulokset ääripään oppilaiden osalta ovat vääristyneitä pienemmän oppilasmäärän vuoksi. Matematiikan arvosanan ja eri esitysmuotojen välille kuitenkin löydettiin yhteys, kun tutkittiin hyvin edustettuja arvosanaluokkia 7–9. Arvosanan parantuessa oppilaat löysivät todennäköisemmin enemmän eri esitysmuotoja. Lisäksi tutkimuksessa havaittiin, ettei tyttöjen ja poikien välillä ollut suurta eroa eri esitysmuotojen löytämisen suhteen, mutta kahdeksannella vuosiluokalla olleet löysivät keskimäärin enemmän eri esitysmuotoja kuin seitsemännellä vuosiluokalla olleilla.

Oppikirjat painottivat oletuksen mukaan osaa kokonaisuudesta ja osamäärää rationaaliluvun esitysmuodoista. Näitä esitysmuotoja käsiteltiin yhteensä kuusi vuosiluokkaa, ja niille annettiin molemmille vain yksi merkintätapa. Muuttamista toisiksi merkintätavoiksi harjoiteltiin erityisesti osan kokonaisuudesta ja osamäärän välillä, kun vuosittain harjoiteltiin murto- ja desimaalimerkinnän muuntamista toisikseen. Tämä oli odotettava yhteys, sillä murto- ja desimaaliluvut ovat hallitsevassa osassa rationaaliluvun merkintätapoja koko yläkoulun ajan ja suurimmassa osassa jatko-opintojakin. Myös mitan ja suhteen välille luotiin yhteyttä geometrian puolella, ja merkintätavoiltaan molemmat yhdistettiin murto- ja desimaalilukuun. Operaattori oli ainut, jolle ei kirjasarjassa luotu omaa merkitystä, mutta sitä käsiteltiin luonnollisesti harjoiteltaessa murtoluvulla kertomista. Oppikirjat etenevät laskutaito edellä ja tutustuttavat oppilaat kaikkiin merkintätapoihin, mutta syvemmin eri esitysmuotojen esittämistä erilaisilla merkintätavoilla ei kirjasarjassa tutustuttu. Aiemmin tehdyn tutkimuksen valossa olisi kuitenkin hyödyllistä pyrkiä laajentamaan eri rationaalilukujen esitysmuotojen välistä yhteyttä myös oppikirjallisuudessa.

Suomessa on tehty vähän rationaaliluvun eri esitysmuotojen hallintaan liittyvää tutkimusta, mutta maailmalla sitä on tehty jo muutaman vuosikymmenen ajan. Maailmalla havaitut puutteelliset taidot rationaaliluvuilla laskemisessa ja esitysmuotojen hallinnassa olivat havaittavissa myös tämän tutkimuksen nojalla suomalaisilla yläkoululaisilla. Vaikka Suomi on menestynyt PISA-tutkimuksissa erityisesti matematiikan osalta, on myös suomalaisilla yläkoululaisilla samanlaiset ongelmat kuin vähemmän menestyneiden maiden yläkoululaisilla. Kuitenkin PISA-tutkimuksissa menestyneet Aasian maiden oppilaat ovat muiden maiden oppilaita etevämpiä rationaalilukujen käsittelyssä. Tämän tutkimuksen avulla ei voida sanoa, onko juuri rationaaliluvun eri esitysmuotojen hallinta PISA-tuloksissa menestymiseen avain.

Tämän tutkimuksen jatkona voisi olla aiheellista tutkia eri rationaaliluvun esitysmuotojen tunnistamisen ohella myös eri esitysmuodoista toiseksi muuntamista. Oppilaiden havaittiin tässä tutkimuksessa löytävän lähes kaikkia esitysmuotoja, mutta heidän kykyään käsitellä matemaattisia olioita ja ilmiöitä näiden avulla ei mitattu kuin hieman. Olisi mielenkiintoista tietää, onko oppikirjallisuudessa painotettujen desimaali- ja murtolukumerkintöjen välillä helpompi siirtyä kuin esimerkiksi siirtyminen suhteen tai mitan merkintään.

LÄHTEET

Aktas, M.C., Apaydin, Z. & Aktas, D.Y. 2014. 9th Grade students' understanding levels of density in the set of rational numbers. Egitim ve Bilim, 39:171.

Bailey, D.H., Siegler, R.S. & Geary, D.C. 2014. Early predictors of middle school fraction knowledge. Developmental Science. 17:5, 775–785.

Ben-Chaim, D, Ilany, B, & Keret, Y 2012. Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education (pre- and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes). Rotterdam. Sense Publishers.

Clarke, D, & Roche, A 2009. Students’ fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. Educational Studies In Mathematics, 72:1, 127–138.

Cramer, K.A., Post, T.R. & delMas, R.C. 2002. Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 33:2, 111–144.

Grönfors, M. & Vilkka, H. (toim.) 2011. Laadullisen tutkimuksen kenttätyömenetelmät. Hämeenlinna: Sofia-Sosiologia-Filosofiapu Vilkka. Viitattu 24.5.2018 http://vilkka.fi/books/Laadullisen_tutkimuksen.pdf

Fischer, R.M. 2014. Rational numbers and the Common Core State Standards: A descriptive case study. Montana State University.

Heikkilä, T. 2014. Tilastollinen tutkimus, 9.uud.p. Edita Publishing Oy, Helsinki.

Ilmavirta, R., Rikala, S., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. 2009. Laskutaito 1–6, WSOY oppimateriaalit, Helsinki.

Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. 2018. ”What kind of meanings do prospective class teachers find for mathematical symbol ” $\frac{2}{3}$”-artikkelin käsikirjoitus.

Joutsenlahti, J., Perkkilä, P. & Tossavainen, T. 2017. “Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa”, FMSERA, 99–109. Viitattu 28.5.2018 https://journal.fi/fmsera/article/view/60904

Ketokivi, M. 2015. Tilastollinen päättely ja tieteellinen argumentointi. Gaudeamus Oy.

Kastberg, S. & Morton, C. 2014. Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on decimals. The Mathematics Enthusiast, 11:2, 311–332.

Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho, E., Sankilampi, T., Selenius, R., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. 2012. Laskutaito 7–8, WSOYpro, Helsinki.

Lim, K.H. 2011. Addressing the multiplication makes bigger and division makes smaller misconceptions via prediction and clickers. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42:8, 1081–1106.

Marshall, S. P. 1993. Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. In T. P. Carpenter, B. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 261–288.

Meert, G., Gregoire, J. & Noel, M. 2010. Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds?", Journal of experimental child psychology, 107:3, 244–259.

Merenluoto, Kaarina. 2001. Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteelisenä muutoksena matematiikassa. Turun yliopiston julkaisuja C 176, Turun yliopisto.

Monaghan, S.R. 2013. Textbooks, teachers, and middle school mathematics student achievement, Marquette University.

Moseley, B, Okamoto, Y, & Ishida, J. 2007. Comparing us and Japanese elementary school teachers’ facility for linking rational number representations. International Journal Of Science & Mathematics Education, 5:1, 165–185.

Moss, J., & Case, R. 1999. Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and experimental curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 122-147.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. 2012. TIMSS 2011 international results in mathematics. Boston, MA: TIMSS and PIRLS International Study Center.

Olive, J, & Vomvoridi, E 2006. Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim, Journal Of Mathematical Behavior, 25:1, 18–45.

Onwuegbuzie, A. J., & Leech, N. L. 2004. Enhancing the interpretation of significant findings: The role of mixed methods research. Artikkeli esitetty the Eastern Educational Research Association-yhteisön vuosittaisessa tapaamisessa, Clearwater, FL.

Rau, M, Aleven, V, & Rummel, N 2017. Making connections among multiple graphical representations of fractions: sense-making competencies enhance perceptual fluency, but not vice versa. Instructional Science, 45:3, 331–357.

Sarajärvi, A, & Tuomi, J, 2018. Laadullinen tutkimus ja sisällön analyysi, Tammi.

Shahbari, J, & Peled, I 2017. Modelling in primary school: constructing conceptual models and making sense of fractions. International Journal of Science & Mathematics Education, 15:2, 371–391.

Shaughnessy, M.M. 2009. Students' flexible use of multiple representations for rational number: Decimals, fractions, parts of area, and number lines. University of California, Berkeley.

Siegler, R.S., Thompson, C.A. & Schneider, M. 2011. An integrated theory of whole number and fractions development. Cognitive psychology, 62:4, 273.

Stewart, V. 2005. Making sense of students' understanding of fractions: An exploratory study of sixth graders' construction of fraction concepts through the use of physical referents and real world representation. The Florida State University, Florida.

Tian, J. & Siegler, R.S. 2018. Which type of rational numbers should students learn first?", Educational Psychology Review, 30:2, 351–372.

Zhang, X., Clements, M.A. & Ellerton, N.F. 2015. Conceptual mis(understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. Mathematics Education Research Journal, 27:2, 233–261.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. 2010. How many "decimals" are there between two "fractions"? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. Cognition and Instruction, 28:2, 181–209.

Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. 2017. Number sense in the transition from natural to rational numbers. British Journal of Educational Psychology, 87:1, 43.

Väisälä, K. 1963. Algebran oppi- ja esimerkkikirja 1. Werner Sodertröm OY:n kirjapaino, Helsinki. Viitattu 22.8.2018 https://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/vaisala/vaisala.pdf

Wood, M.B., Olson, A.M., Freiberg, E.J. & Vega, R.I. 2013. Fractions as subtraction: An activity-oriented perspective from elementary children. School Science and Mathematics, 113:8, 390.

LIITE 1: Tutkimuslomake

Tutkimuksen luokittelua varten olevia kysymyksiä. Rastita sinua koskeva kohta kustakin kysymyksestä.

Sukupuoli

- ☐ Poika
- ☐ Tyttö
- ☐ Muu
- ☐ En halua kertoa

Luokka-aste

- ☐ 7. luokka
- ☐ 8. luokka

Joulutodistuksessa ollut matematiikan arvosana: ______

Miten vaikeaksi koet murtoluvun käsitteenä matematiikan opiskelussa? Ympyröi numero.

1	2	3	4	5
Helppo		Keskivaikea		Vaikea

---

1. Mitä eri merkityksiä keksit seuraavalle merkinnälle? Kerro kaikki keksimäsi erilaiset merkitykset ja niille selitykset alla oleviin kohtiin. Voit myös lisätä uusia kohtia alle.

$$\boxed{\frac{2}{3}}$$

1. ____

____

2. ____

____

3. ____

____

4. ____

____

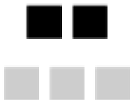
5. ____

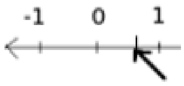
____

2. Kerro, mitä tällaisella merkinnällä tai kuvalla voidaan esimerkiksi kuvata? Kerro esimerkki.

$$\frac{2}{3}$$

$\approx 0{,}67$





3. Mehutiivisteen kyljessä lukee, että mehutiivistettä tulee veden määrään nähden suhteessa 1:3.

a) Jos sinulla on 1 litra mehutiivistettä käytössäsi, kuinka monta litraa vettä tarvitset mehun tekemiseen? Kuinka monta litraa valmista mehua saat?

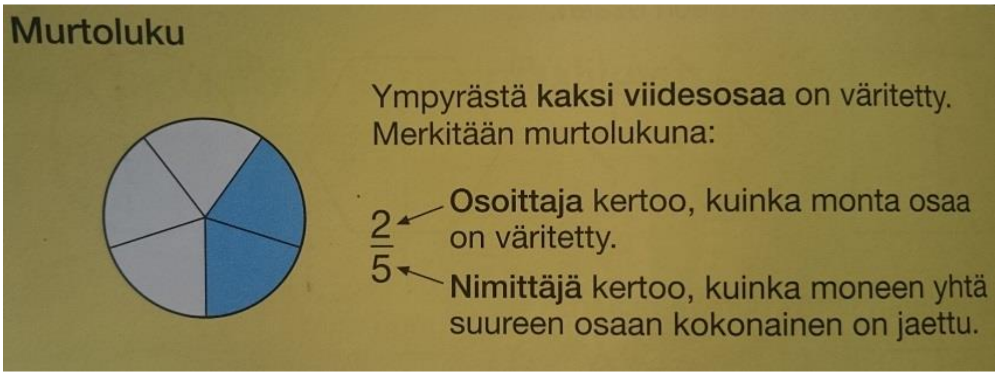
b) Kuinka monta prosenttia valmiista mehusta on mehutiivistettä?

4. Kumpi murtoluvuista on suurempi? Käytä ”pienempi kuin” ja ”suurempi kuin” -merkintöjä (< ja >).

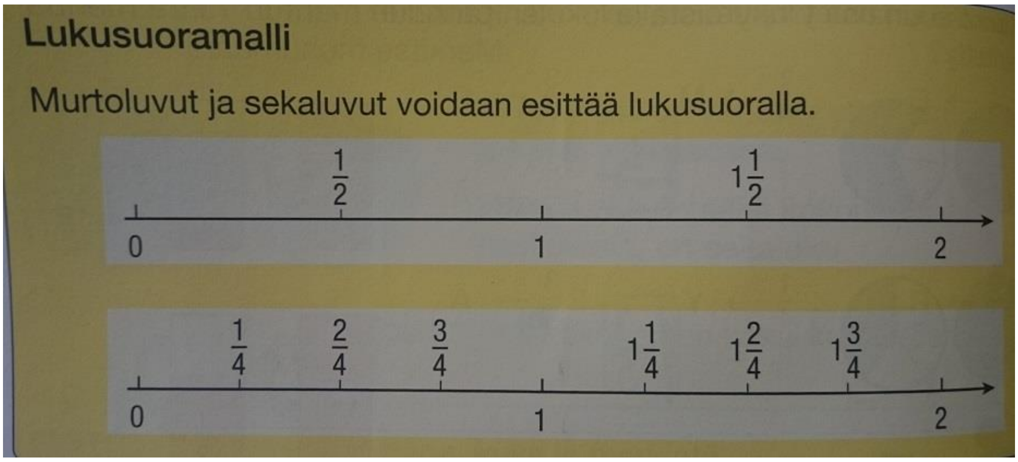
a) $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ d) $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$

e) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$ f) $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{3}$ g) $\frac{6}{9}$ $\frac{4}{8}$ h) $\frac{3}{3}$ $\frac{7}{8}$

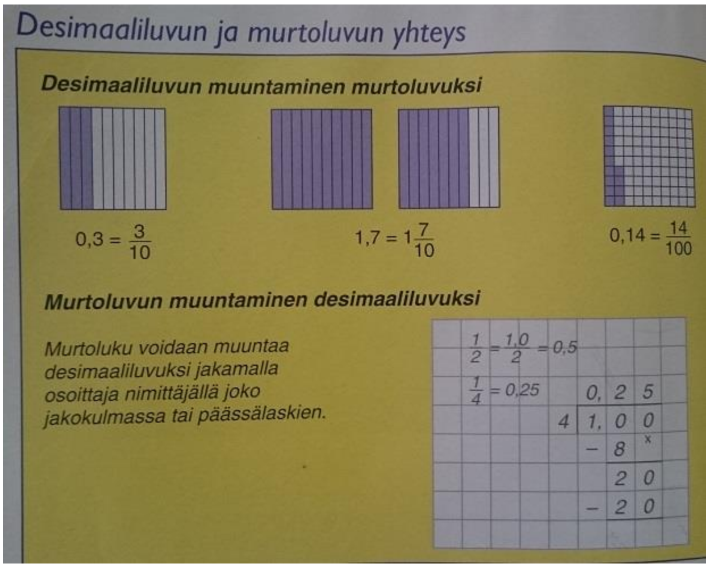
LIITE 2: Oppikirjasarjan kuvia



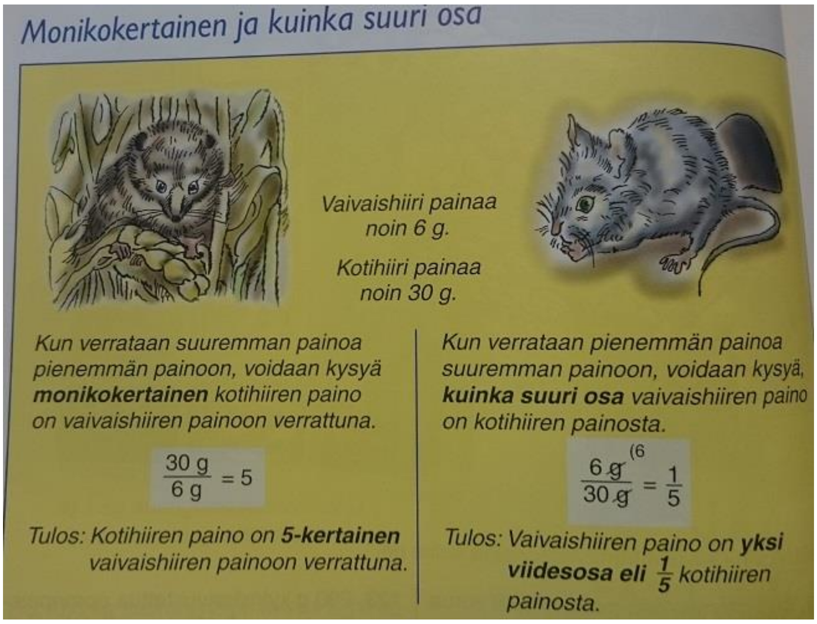
Liitekuva 1 Murtoluvun esittely 3. vuosiluokan keväällä. (Laskutaito 3 syysosa, 24)



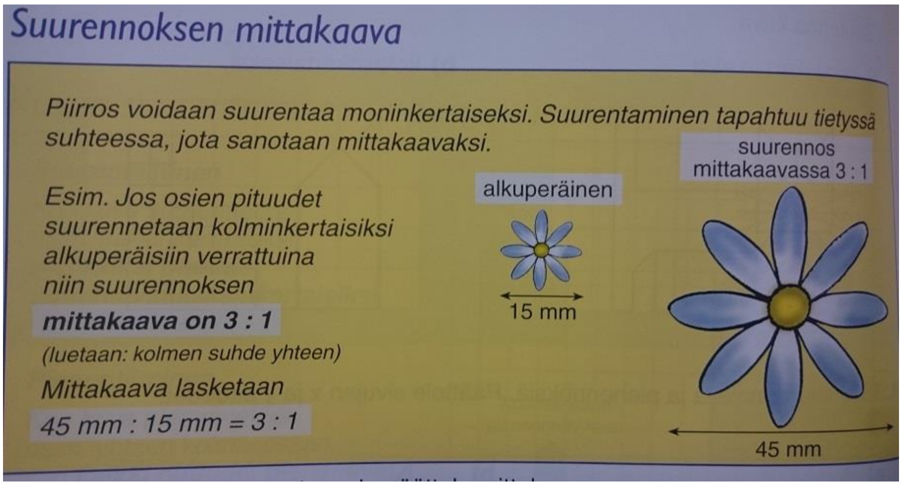
Liitekuva 2 3. Vuosiluokan kevätosuuden kirjassa yhdistetään lukusuora sekä murtoluku toisiinsa. (Laskutaito 3 kevätosa, 34)



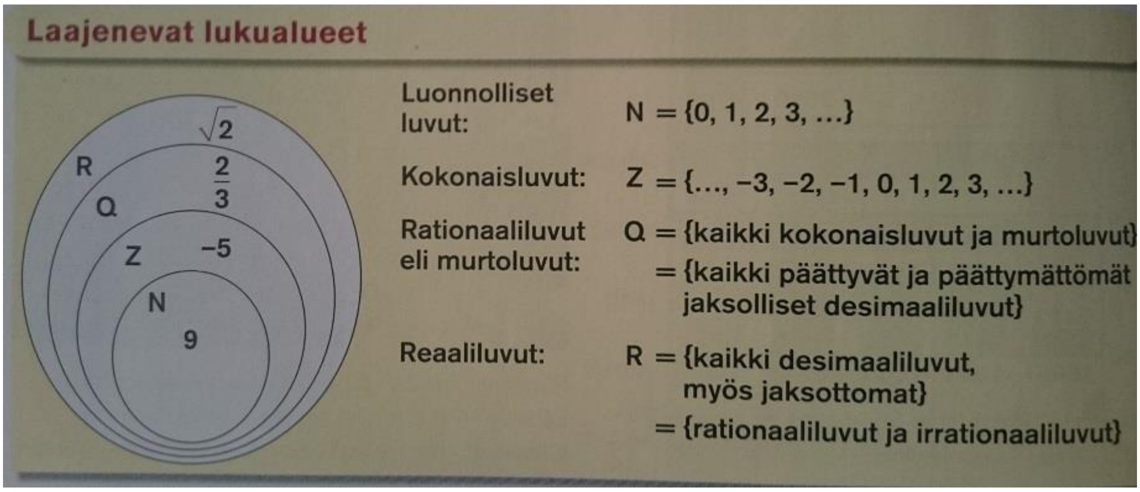
Liitekuva 3 5. Vuosiluokalla esitetty murtoluvun ja desimaaliluvun välinen yhteys. Laskutaito 5, 60)



Liitekuva 4 6. vuosiluokalla oppilaille opetetaan vertailemaan suuruutta murtolukumerkinnän ja jakolaskun avulla. (Laskutaito 6, 52)



Liitekuva 5 6. vuosiluokalla opetettu mittakaava. (Laskutaito 6, 66)



Liitekuva 6 8. vuosiluokalla tehty eri lukujoukkojen esitys lukualueina. (Laskutaito 8, 62)